Задачи экзамена "Алгебра-1"лектор А.М.Левин.

В задачах 1-3 имеется в виду, что нулю равен *многочлен* полученный подстановкой.

1.Определим идеал J_3 кольца многочленов от трех переменных $\mathbb{R}[x,y,z]$ условием $f \in J_3 \Leftrightarrow f(t,t^2,t^3)=0$. Найдите систему образующих идеала J_3.

2. Определим идеал J_2^{hom} кольца многочленов от трех переменных $\mathbb{R}[T,X,Y]$ условием $f \in J_2^{hom} \Leftrightarrow f(s^2,st,t^2)=0$. Найдите систему образующих идеала J_2^{hom}.

3. Определим идеал J_3^{hom} кольца многочленов от четырех переменных $\mathbb{R}[T,X,Y,Z]$ условием $f \in J_3^{hom} \Leftrightarrow f(s^3,s^2t,st^2,t^3)=0$. Найдите систему образующих идеала J_3^{hom}.

4. Пусть $f(x)=a_nx^n+\cdots a_1x+a_0$ и $g(x)=b_mx^m+\cdots b_1x+b_0$– многочлены такие, что суммы коэффициентов равны нулю : $\sum a_i = \sum b_j = 0$. Найдите их результант.

5. Пусть A - линейный оператор с единичным определителем в двумерном вещественном векторном пространстве такой, что его след не равен ± 1. Докажите что оператор B с ним перестановочен $AB=BA$ титтк B линейная функция от A: $B=\alpha A+\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

6. Найдите ЖНФ тензорного произведения

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Для простого p рассмотрим конечное поле $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/(p)$. Положим $C_p(i)$ равным числу неприводимых многчленов над $\mathbb{F}_p$ степени i со старшим коэффициентом 1. Докажите что корректно определен формальный степенной ряд $\prod(1-t^i)^{C_p(i)}$ и это произведение равно $1-pt$.

8. Пусть z – гауссово число $z \in R = \mathbb{Z}[i]$. Найдите число элементов в $R/(z)$.

9. Найти все пары (абелева группа A порядка 125, гомоморфизм $J : A \to A$ такой что $J^2(a)=-a$).

10) Пусть F -поле состоящее из конечного числа элементов. Докажите что число элементов в F равно степени p^f какого-то простого числа p.