Плоские кубики (a.k.a. эллиптические кривые)

Пусть $Q(x, y, z)$ — однородный многочлен степени d. Обозначим C_Q кривую $Q = 0$ в $\mathbb{C}P^2$.

Задача 1. a) Сколько касательных можно провести к C_Q из произвольной точки? Какие касательные необходимо учитывать с кратностью?

Подсказка: Для вычислений точку удобно перенести на абсолют. Запишите условие касания отдельным уравнением и воспользуйтесь теоремой Безу.

b) Докажите, что кратное касание происходит в особых точках, а также в *точках перегиба*, заданных уравнениями $Q = 0$ и

$$\det \begin{pmatrix} \partial^2 Q/\partial x \partial x & \partial^2 Q/\partial x \partial y & \partial^2 Q/\partial x \partial z \\ \partial^2 Q/\partial y \partial x & \partial^2 Q/\partial y \partial y & \partial^2 Q/\partial y \partial z \\ \partial^2 Q/\partial z \partial x & \partial^2 Q/\partial z \partial y & \partial^2 Q/\partial z \partial z \end{pmatrix} = 0.$$

c) Сколько таких *точек перегиба* есть у C_Q? Какие из них необходимо учитывать с кратностью?

С этого момента пусть $\deg Q = 3$. Соответствующая кривая называется *плоской кубикой*. Предположим, что многочлен Q неприводим, определим на C_Q структуру коммутативной группы.

Ключевая идея — определить операцию соотношением, что сумма трёх точек C_Q, лежащих на одной прямой в $\mathbb{C}P^2$, равна нулю. Тогда нуль группы должен быть точкой перегиба C_Q (докажите это!), обозначим эту точку e. Значит, для $p \in C_Q$ противоположный элемент $-p$ находится, как точка C_Q на прямой в $\mathbb{C}P^2$, соединяющей e и p. А для пары точек p и q вычислим $p + q$ так: соединим их прямой и возьмем её пересечение с C_Q — это будет $-p-q$, затем, соединяя эту точку с e, найдём $p+q$. Докажем ассоциативность этого умножения.

Задача 2. Пусть p, q, $r \in C_Q$.

a) Проведите ещё одну кубику C_{Q_1} (соотв. C_{Q_2}) через точки e, p, q, r, $p + q$, $q + r$, $-p - q$, $-q - r$ и $-(p + q) - r$ (соотв. $-p - (q + r)$).

Подсказка: Три прямых — тоже кубика.

b) Докажите, что многочлены Q, Q_1 и Q_2 линейно зависимы. Выведите отсюда, что $-(p+q) - r$ совпадает с $-p - (q + r)$.

Подсказка: Обратите внимание, сколько у них общих корней.

Задача 3. Опишите геометрически точки C_Q порядка 2, 3 и 4 в этой группе. Сколько имеется таких точек?

Задача 4. Докажите, что проективным преобразованием уравнение неприводимой кубики приводится к *нормальной форме Вейерштрасса*: $y^2 z - x^3 - axz^2 - bz^3$, где a, $b \in \mathbb{C}$.

Подсказка: Проведите ось x через точки второго порядка. Поместите ноль группы на абсолют.

Задача 5. a) Докажите, что C_Q особа тогда и только тогда, когда в нормальной форме Вейерштрасса $4a^3 + 27b^2 = 0$.

Подсказка: Вспомните дискриминант кубического уравнения.

b^*) Докажите, что $j = a^3/(4a^3 + 27b^2)$ является инвариантом кривой.

c^*) Выразите этот инвариант в геометрических терминах.

d^*) Докажите, что две кривые, j-инвариант которых совпадает, совмещаются проективным преобразованием.

Задача 6*. a^*) Докажите, что если C_Q особа, то её можно *параметризовать* (нетривиально рационально отобразить $\mathbb{C}P^1$ в C_Q).

b^{**}) Докажте, что если C_Q неособа, то её параметризовать невозможно.