Плоские кривые

Задача 1. Запишите уравнение кривой, двойственной к квадрике $\sum q_{ij}x_ix_j$ в $\mathbb{CP}^2$.

Определение 1 *Класс кривой* в $\mathbb{CP}^2$ — степень двойственной кривой.

Задача 2. Пусть C — проективная кривая без особенностей степени d. Докажите, что её класс $\kappa = d(d-1)$.

Подсказка: В скольких точках прямая общего положения пересекает двойственную кривую?

Пусть кривая C задана в аффинной карте уравнением $F = 0$. Скажем, что особая точка $p \in C$ — *простое самопересечение*, если матрица вторых производных $(\partial^2 F/\partial x^i \partial x^j)$ невырождена. Примером такой точки служит точка $(0,0)$ для аффинной кривой $xy = 0$.

Задача 3. a) Приведите пример неразложимого многочлена, нули которого образуют кривую с l точками простого самопересечения.

b) Как выглядят на исходной кривой простые самопересечения двойственной кривой?

c) Пусть кривая C имеет только особенности типа простые самопересечения в количестве l штук. Докажите, что $\kappa = d(d-1) - 2l$.

Пусть кривая C задана в аффинной карте уравнением $F = 0$. Будем говорить, что особая точка $p \in C$ — *точка возврата (cusp)*, если матрица вторых производных $(\partial^2 F/\partial x^i \partial x^j)$ имеет ранг 1, и третья производная F в направлении ядра не равна нулю. Примером такой точки служит точка $(0,0)$ для аффинной кривой $y^2 - x^3 = 0$.

Задача 4. a) Приведите пример неразложимого многочлена, нули которого образуют кривую с k точками возврата.

b) Как выглядят на исходной кривой точки возврата двойственной кривой?

c) Как учесть точки возврата в формуле для класса кривой?

Задача 5*. Дайте определение и вычислите поправку при подсчёте класса для следующих особенностей:

a^*) n-кратное самопересечение;

b^*) самопересечение с точкой возврата;

c^*) произвольная точка, в которой матрица вторых производных имеет ранг 1.

Комплексные кривые можно рассматривать и с точки зрения топологии. В этом случае они представляют из себя поверхности, их можно триангулировать и вычислить эйлерову характеристику — количество вершин минус количество рёбер плюс количество граней.

Задача 6. Вычислите эйлерову характеристику

a) коники $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;

b) неособой кубики;

c) кубики с двойной точкой;

d) кубики с точкой возврата.

Подсказка: Спроектируйте кривую на $\mathbb{CP}^1$. Постройте совместимую с этой проекцией триангуляцию.

Задача 7. a) Докажите, что для неособой кривой эйлерова характеристика $\chi = 2d - \kappa$.

Подсказка: Спроектируйте кривую на $\mathbb{CP}^1$, избегая кратных касаний.

b^*) Как учесть в этой формуле простые самопересечения и точки возврата?

Задача 8*. a^*) Докажите, что любую кривую в $\mathbb{CP}^n$ можно спроектировать в неособую кривую в $\mathbb{CP}^3$.

b^*) Докажите, что любую кривую в $\mathbb{CP}^n$ можно спроектировать в кривую в $\mathbb{CP}^2$ с особенностями только типа простые самопересечения.

c^{**}) Постройте кривую в $\mathbb{CP}^3$, которую невозможно спроектировать в $\mathbb{CP}^2$ без особенностей.