Многообразия Грассманна

Пусть $Gr(k,n)$ — множество k-мерных плоскостей $\mathbb{C}^n$. Зададим на этом множестве естественную структуру проективного многообразия. Для начала вложим $Gr(k,n)$ в $\mathbb{CP}(\Lambda^k(\mathbb{C}^n))$, где $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ — пространство косых многочленов степени k от n переменных.

Задача 1. Докажите, что сопоставление k-мерной плоскости с базисом $e_1, \dots, e_k$ класса вектора $e_1 \wedge \dots \wedge e_k \in \mathbb{CP}(\Lambda^k(\mathbb{C}^n))$ задаёт вложение множеств.

Это отображение называется *вложением Плюккера*. Докажем, что его образ — проективное многообразие. Для $w \in \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ определим отображение умножения $m_w : \mathbb{C}^n \cong \Lambda^1(\mathbb{C}^n) \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{C}^n)$, переводящее v в $v \wedge w$.

Задача 2. a) Докажите, что для $w \neq 0$ ранг m_w не меньше $n-k$.

b) Докажите, что элемент $w \in \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ разложим (то есть лежит в образе $Gr(k,n)$) тогда и только тогда ранг m_w равен $n-k$.

c) Запишите это условие через определители. Сколько уравнений получилось и какова их степень?

Этого уже достаточно, чтобы считать $Gr(k,n)$ проективным многообразием. На самом деле, можно обойтись уравнениями второй степени — (*уравнениями Плюккера*). Заметим, что элементы двойственного пространства $\Lambda((\mathbb{C}^n)^*)$ действуют на $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ дифференциальными операторами (это мы наблюдали, изучая алгебры Клиффорда).

Задача 3. a) Докажите, что $w \in \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ разложим тогда и только тогда $\xi(w) \wedge w = 0$ для любого $\xi \in \Lambda^{k-1}((\mathbb{C}^n)^*)$.

Подсказка: Вычислите размерность подпространства, составленного $\xi(w)$ для данного w.

b) Запишите это условие системой уравнений. Сколько независимых уравнений получилось для $Gr(2,4)$?

Задача 4. Какими дополнительными уравнениями в координатах Плюккера задаются плоскости

a) содержашие данную плоскость (меньшей размерности);

b) пересекающие данную плоскость.

Задача 5. a) Докажите, что множество касательных плоскостей к неособому проективному многообразию является подмногообразием (т.е. замкнуто по Зарисскому) в соответствующем многообразии Грассмана.

Подсказка: Разберите вначале случай, когда количество уравнений совпадает с коразмерностью касательного пространства.

b) Какими уравнениями в $Gr(2,4)$ выделяются касательные к кубике Веронезе в $\mathbb{CP}^3$?

Определение 1 Будем говорить, что проективное многообразие M размерности N *рационально*, если найдутся открытые по Зарисскому множества $U_1 \subset M$, $U_2 \subset \mathbb{CP}^N$ и регулярный рациональный изоморфизм $U_1 \cong U_2$.

Докажем, что $Gr(k,n)$ — рациональное многообразие размерности $k(n-k)$. Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — подпространство размерности $n-k$. Обозначим $\widetilde{U} \subset Gr(k,n)$ подмножество плоскостей, не пересекающихся с U. Мы уже знаем, что оно открыто в топологии Зарисского.

Задача 6. Постройте регулярный рациональный изоморфизм между $\widetilde{U}$ и $\mathbb{C}^{k(n-k)}$.

Подсказка: Элементы $\widetilde{U}$ являются графиками отображений из $\mathbb{C}^n/U$ в U.

Задача 7. a) Задайте структуру проективного многообразия на множестве флагов — цепочек вложенных подпространств $V_1 \subset \dots \subset V_m$ фиксированной размерности.

b) Докажите, что многообразие флагов тоже рационально и вычислите его размерность.