Идеалы нётеровых колец

В этом листке все кольца — коммутативные с единицей.

Задача 1. Докажите, что если кольцо R нётерово, то и кольцо формальных рядов $R[[x]]$ нётерово.

Определение 1 Будем называть идеал *неприводимым*, если он не представим пересечением двух не вложенных друг в друга идеалов.

Задача 2. Какие идеалы колец $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}[x]$ неприводимы?

Задача 3. Докажите, что всякий идеал нётерового кольца представим конечным пересечением неприводимых идеалов.

Задача 4. Пусть $I_0 \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал многочленов с нулевым свободным членом. Представьте пересечением неприводимых идеалов

a) идеал I_0^2 всеми возможными способами;

b) идеал I_0^k каким-нибудь способом.

Задача 5. a) Докажите, что простой идеал неприводим.

b) Докажите, что если идеал представим пересечением простых идеалов, попарно не вложенных друг в друга, то такое представление единственно.

Определение 2 Идеал $I \subset R$ называется *примарным*, если из $xy \in I$ следует $y \in I$ или найдётся n, такой что $x^n \in I$.

Задача 6. a) Какие идеалы колец $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}[x]$ примарны?

b) Приведите пример примарного идеала, не являющегося неприводимым.

Определение 3 Для идеала $I \subset R$ и элемента $x \in R$ определим *дробный идеал* $I : x$ как идеал, состоящий из элементов $y \in R$, таких что $xy \in I$.

Задача 7. a) Докажите, что для всякого нётеровго кольца R, идеала $I \subset R$ и элемента $x \in R$ найдётся натуральное n, такое что для всех $m > n$ идеал $I : x^m$ совпадает с $I : x^n$.

b) Докажите, что для такого n имеем $I = (I : x^n) \cap (I + (x^n))$.

c) Докажите, что всякий неприводимый идеал примарен.

Тем самым, мы доказали теорему Ласкера-Нётер *о представлении идеала нётерового кольца пересечением примарных идеалов (*примарном разложении*). Как показывают уже имеющиеся примеры, такое разложение само по себе не единственно ни в каком разумном смысле.*

Определение 4 Напомним, что *радикал* идеала I — идеал, составленный элементами, степени которых принадлежат I.

Задача 8. a) Докажите, что радикал примарного идеала прост.

b) Докажите, что радикал пересечения конечного набора идеалов совпадает с пересечением их радикалов.

c) Докажите, что радикал произвольного идеала I совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих I.

d) Что можно сказать о единственности примарного разложения радикала идеала?

Задача 9*. Приведите пример идеала с простым радикалом, не являющегося примарным.