Симметрические многочлены

Задача 1. Докажите, что всякий симметрический многочлен от переменных $x_1, \dots, x_n$ может быть однозначно представлен многочленом от

a) $e_1, \dots, e_n$, где $e_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$;

b) $h_1, \dots, h_n$, где $e_k = \sum_{i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$;

c) $p_1, \dots, p_n$, где $p_k = x_1^k + \dots + x_n^k$.

Подсказка: Упорядочите мономы лексикографически.

Задача 2. a) Пусть $s_{ij} \in S_n$ — транспозиция. Докажите, что для любого многочлена P многочлен $s_{ij}P - P$ делится на $x_i - x_j$.

b) Предложите базис в пространстве кососимметрических многочленов. Какой модуль они образуют над симметрическими?

Обозначим за $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ кольцо многочленов, за R^{S_n} — подкольцо симметрических многочленов. Пусть $\mathfrak{I} \subset R$ — идеал, порождённый симметрическими многочленами без свободного члена.

Задача 3. a) Найдите радикал $\mathfrak{I}$.

Подсказка: Найдите общие нули этого идеала.

b) Докажите, что $R/\mathfrak{I}$ имеет конечную размерность.

Задача 4. a) Пусть образы градуированных многочленов $H_1, \dots, H_N \in R$ порождают $R/\mathfrak{I}$. Докажите, что H_i порождают R как R^{S_n}-модуль (в частности, этот модуль конечно-порождён).

b) Пусть $P_1, \dots, P_m$ — однородные симметрические многочлены, $Q_1, \dots, Q_m$ — произвольные однородные многочлены. Докажите, что если $\sum P_i Q_i = 0$, то или $Q_1 \in \mathfrak{I}$, или $P_1 = R_2 P_2 + \dots + R_m P_m$, где R_i — симметрические многочлены.

Подсказка: Проведите индукцию по степени Q_1. Если $\deg Q_1 = 0$, усредните соотношение по действию перестановок. Для доказательстве шага индукции убедитесь, что $s_{ij}Q_1 - Q_1 \in \mathfrak{I}$ или $P_1 = \dots$, после чего усредните соотношение по действию перестановок.

c) Пусть образы градуированных многочленов $H_1, \dots, H_N \in R$ образуют базис $R/\mathfrak{I}$. Докажите, что H_i образуют базис R^{S_n}-модуля R, в частности, этот модуль свободен.

Задача 5. Вычислите ряд Гильберта $R/\mathfrak{I}$. Чему равна размерность этого пространства?

Задача 6. Пусть $\operatorname{char} K = 0$, и L/K — конечное расширение Галуа с группой Галуа G. Для простоты предположим, что K содержит все корни из единицы. Докажите, что представление G в L как векторном пространстве над K изоморфно регулярному представлению.

Подсказка: Вычислите следы действия элементов G, используя основную теорему теории Галуа и устройство циклических расширений.

Задача 7. a) Докажите, что поле рациональных функций $K(x_1, \dots, x_n)$ является расширением Галуа поля рациональных симметрических функций $K(e_1, \dots, e_n)$ с группой Галуа S_n.

b) Докажите, что для всякого многочлена P найдётся многочлен Q, такой что PQ — симметрический.

c) Пусть $S \cong \mathbb{C}[e_1, \dots, e_n]$ — алгебра симметрических многочленов. Докажите изоморфизм алгебр $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes_S \mathbb{C}(e_1, \dots, e_n) \cong \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$.

d) Докажите, что представление S_n в $R/\mathfrak{I}$ изоморфно регулярному представлению.

Подсказка: Примените $\otimes_S \mathbb{C}(e_1, \dots, e_n)$.

Задача 8*. Пусть $H \subset R$ — пространство многочленов, таких что

$$\left((\partial/\partial x_1)^k + \dots + (\partial/\partial x_n)^k\right) P = 0 \quad \text{для всех} \quad k > 0.$$

Докажите, что H изоморфно проектриуется на фактор $R/\mathfrak{I}$.

Пусть группа $G \subset GL_n$ действует на многочленах линейными заменами переменных. Обозначим за R^G алгебру инвариантных многочленов, за $\mathfrak{I}_G$ — идеал, порождённый инвариантвми без свободного члена.

Задача 9. Пусть $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ действует на многочленах, меняя знак всех переменных.

a) Будет ли R^G изоморфна алгебре многочленов?

b) Будет ли R конечнопорождён как R^G-модуль?

c) Будет ли R свободен как R^G-модуль?

Будем говорить, что линейный оператор A является *комплексным отражением*, если ранг $\mathrm{Id} - A$ равен единице. Обычные отражения относительно гиперплоскости служат примером таких операторов.

Задача 10*. Пусть конечная группа $G \subset GL_n$ порождена комплексными отражениями. Докажите, что

a^*) R является конечнопорождённым свободным R^G-модулем;

b^*) представление G в $R/\mathfrak{I}_G$ изоморфно регулярному представлению;

c^{**}) R изоморфна алгебре многочленов.

d^{**}) произведение степеней образующих R равно $|G|$.