Практикум

Задача 1. Вычислите $\mathrm{Tor}_i(M, N)$ для следующих $\mathbb{Z}$-модулей (абелевых групп):

a) $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/nZ$;

b) $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;

c) $M = N = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Задача 2. a) Вычислите сизигии и многочлен Гильберта кубики Веронезе.

b) Постройте неприводимую кривую степени 5 в $\mathbb{CP}^3$. Вычислите для неё сизигии и многочлен Гильберта.

Задача 3. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^n$ и $Y \subset \mathbb{CP}^m$ — проективные многообразия. Вложим $\mathbb{CP}^n = \{(x_0 : \cdots : x_n)\}$ и $\mathbb{CP}^m = \{(y_0 : \cdots : y_m)\}$ в $\mathbb{CP}^{m+n+1} = \{(x_0 : \cdots : x_n : y_0 : \cdots : y_n)\}$. Определим *джойн* $X \star Y$ как объединение прямых, соединяющих точку X с точкой Y.

a) Докажите, что $X \star Y$ —проективное многообразие. Какими уравнениями оно задаётся?

b) Докажите, что для координатных колец выполнено $S(X \star Y) \cong S(X) \otimes_{\mathbb{C}} S(Y)$.

c) Чему равна размерность и степень $X \star Y$?

d) Как, зная сизигии X и Y, вычислить сизигии $X \star Y$?

Задача 4. Постройте фильтрацию $0 = M(0) \subset M(1) \subset \cdots \subset M(k) = M = R/I$, такую что $M(i+1)/M(i) = R/J_i$, где J_i — простые идеалы, для

a) $R = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (x^\alpha y^\beta)$;

b) $R = \mathbb{C}[x, y, z]$, $I = (x^\alpha, y^\beta)$;

c) $R = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1}, x^{\alpha_2} y^{\beta_2})$;

d) $R = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1}, \ldots, x^{\alpha_m} y^{\beta_m})$;

e^*) $R = \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2, z_3]$, $I = ((z_0 z_2 - z_1^2)^\alpha, (z_1 z_3 - z_2^2)^\beta, (z_0 z_4 - z_1 z_2)^\gamma)$.