(Ко)гомологии ассоциативных алгебр

По умолчанию тензорное произведение и двойственность в этом листке подразумевается над основным полем $\mathbb{C}$.

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{C}$. Напомним, что бимодуль над A — это то же самое, что и модуль над $A \otimes A^{op}$, где A^{op} получается из A переменой порядка сомножителей.

Задача 1. a) Для каких алгебр A бимодуль A с действием A умножением слева и A^{op} умножением справа является свободным бимодулем?

b) Докажите, что для любого бимодуля M бимодуль $A \otimes M \otimes A$ (с действием A на первый сомножитель и A^{op} на третий) является свободным бимодулем. Что можно взять в качестве его образующих?

Задача 2. Пусть $\delta_n : A^{\otimes n} \to A^{\otimes(n-1)}$ — следующее отображение:

$$\delta_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

a) Докажите, что $\delta_n \delta_{n+1} = 0$

b) Докажите, что комплекс $\cdots \xrightarrow{\delta_4} A^{\otimes 3} \xrightarrow{\delta_3} A^{\otimes 2} \xrightarrow{\delta_2} A \to 0$ является свободной резольвентой A как бимодуля (она называется *бар-резольвентой*).

Подсказка: Воспользуйтесь вспомогательным дифференциалом $D : A^{\otimes n} \to A^{\otimes(n+1)}$, определённым как $D(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$.

Задача 3. Пусть M — бимодуль над A.

a) Докажите, что *гомологический комплекс Хохшильда*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_4} A^{\otimes 3} \otimes M \xrightarrow{\partial_3} A^{\otimes 2} \otimes M \xrightarrow{\partial_2} A \otimes M \xrightarrow{\partial_1} M \to 0$$

с дифференциалом $\partial_n : A^{\otimes n} \otimes M \to A^{\otimes(n-1)} \otimes M$, заданным как $\partial_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) =$

$$= a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m a_1 + (-1)^n a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n m + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m$$

вычисляет $\mathrm{Tor}_i^{A \otimes A^{op}}(A, M)$.

b) Докажите, что *когомологический комплекс Хохшильда*

$$\cdots \xleftarrow{d_4} (A^*)^{\otimes 3} \otimes M \xleftarrow{d_3} (A^*)^{\otimes 2} \otimes M \xleftarrow{d_2} A^* \otimes M \xleftarrow{d_1} M \leftarrow 0$$

с дифференциалом $d_n : (A^*)^{\otimes n} \otimes M \to (A^*)^{\otimes(n+1)} \otimes M$, заданным как $(d_n f)(a_1, \ldots, a_{n+1}) =$

$$= a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}) - (-1)^n f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1})$$

вычисляет $\mathrm{Ext}^i_{A \otimes A^{op}}(A, M)$.

Определение 1 *Когомологиями Хохшильда* алгебры A с коэффициентами в модуле M называются пространства $\mathrm{HH}^i(A, M) = \mathrm{Ext}^i_{A \otimes A^{op}}(A, M)$, *гомологиями Хохшильда* — пространства $\mathrm{HH}_i(A, M) = \mathrm{Tor}_i^{A \otimes A^{op}}(A, M)$.

Задача 4. Для $A = \mathbb{C}$ вычислите гомологии и когомологии Хохшильда

a) с коэффициентами в тривиальном бимодуле $\mathbb{C}$;

b) с коэффициентами в A.

Задача 5. Что такое $\mathrm{HH}_0(A, M)$ и $\mathrm{HH}^0(A, M)$ в терминах A и M?

Задача 6. a) Пусть $f : A \to A$ — линейное отображение. Докажите, что f является 1-коциклом Хохшильда с коэффициентами в A тогда и только тогда, когда f является *дифференцированием* A, то есть $f(ab) = af(b) + f(a)b$.

b) Докажите, что пространство $\mathrm{HH}^1(A, A)$ составляют дифференцирования A с точностью до *внутренних дифференцирований* $f_x : A \to A$, $f_x(y) = xy - yx$.

Задача 7. Добавим к алгебре A элемент K и определим умножение на $A \oplus \mathbb{C}K$ по правилу

$$K \cdot a = a \cdot K = 0; \qquad a \cdot b = ab + f(a, b)K \quad \text{где} \quad f \in (A^*)^2.$$

a) Докажите, что такое умножение ассоциативно тогда и только тогда, когда f является 2-коциклом Хохшильда с тривиальными коэффициентами.

b) Докажите, что полученная алгебра (она называется *центральным расширением* A) изоморфна $A \oplus \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда f является кограницей.

Задача 8. Определим "деформированное" умножение на A по правилу

$$a \star b = ab + \varepsilon f(a, b) + o(\varepsilon),$$

где ε — комплексный параметр, а $f : A^{\otimes 2} \to A$ — линейное отображение.

a) Докажите, что это умножение ассоциативно с точностью до $o(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда f является 2-коциклом Хохшильда с коэффициентами в A.

b) Что можно сказать об этой алгебре, если f — кограница?

Задача 9. Пусть $A = T^*(V)$ — тензорная алгебра пространства V (она же свободная ассоциативная алгебра). Вычислите $\mathrm{HH}^i(A, \mathbb{C})$, $\mathrm{HH}_i(A, \mathbb{C})$, $\mathrm{HH}^i(A, A)$, $\mathrm{HH}_i(A, A)$.

Подсказка: Постройте более удобную резольвенту для $T^*(V)$, воспользовавшись тем, что ядро отображения $T^*(V) \otimes T^*(V) \to T^*(V)$ само будет свободным бимодулем.

Задача 10. Вычислите $\mathrm{HH}^i(A, \mathbb{C})$, $\mathrm{HH}_i(A, \mathbb{C})$, $\mathrm{HH}^i(A, A)$, $\mathrm{HH}_i(A, A)$ для

a) $A = \mathbb{C}[x]$;

b^*) $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$;

Подсказка: Постройте аналог резольвенты Кошуля, начинающийся с $A \otimes A \to A$.

c^*) $A = \Lambda_n$

Подсказка: Постройте косой аналог резольвенты Кошуля.