Локализация

Определение 1 Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, $T \subset R$ — подмножество с единицей без нуля, замкнутое относительно умножения. Определим $R[T^{-1}]$, как кольцо классов эквивалентности дробей r/t, $r \in R$, $t \in T$ по отношению $r_1/t_1 \sim r_2/t_2$ если найдётся $t \in T$, такой что $tt_2r_1 = tt_1r_2$.

Задача 1. Докажите, что это действительно отношение эквивалентности, и что сложение и умножение определены корректно. Будет ли естественное отображение R в $R[T^{-1}]$ вложением?

Определение 2 Пусть M — R-модуль, определим $M[T^{-1}]$ как модуль классов эквивалентности дробей m/t, $m \in R$, $t \in T$ по отношению $m_1/t_1 \sim m_2/t_2$ если найдётся $t \in T$, такой что $tt_2m_1 = tt_1m_2$.

Задача 2. a) Докажите, что это действительно отношение эквивалентности, и что действие $R[T^{-1}]$ определено корректно.

b) Докажите, что $M[T^{-1}] \cong R[T^{-1}] \otimes_R M$.

Задача 3. Докажите, что $R[T^{-1}]$ — плоский модуль, другими словами, что локализация переводит точную последовательность в точную.

Пусть $P \subset R$ — простой идеал. Обозначим $R_P = R[(R \setminus P)^{-1}]$, $M_P = M[(R \setminus P)^{-1}]$.

Задача 4. a) Пусть $I \subset R$ — идеал. Докажите, что модуль $(R/I)_P \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I \subset P$.

b) Докажите, что в R_P есть ровно один максимальный идеал. Такие кольца называются *локальными.*

c) Могут ли в R_P быть отличные от нуля и единицы *идемпотенты* (элементы, квадрат которых равен им самим)?

Определение 3 *Длиной* модуля M называется максимальная длина цепочки вложенных подмодулей $0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_m = M$ (длина часто бывает бесконечной).

Задача 5. Пусть R — нётерово кольцо, $I \subset R$ — максимальный идеал.

a) Докажите, что R-модуль R/I^k имеет конечную длину.

b) Вычислите длину R/I^k для $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Задача 6. Пусть R — нётерово кольцо, $I \subset R$ — максимальный идеал, M — конечнопорождённый R-модуль, на котором I^k действует нулём.

a) Докажите, что M имеет конечную длину.

b) Докажите, что длина M равна $\sum_{j=1}^{k} \dim_{R/I} I^{j-1}M/I^jM$, где размерность вычисляется над полем R/I.

c) Докажите, что цепочка $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_m = M$ имеет максимальную длину тогда и только тогда, когда $M_i/M_{i-1} \cong R/I$ для всех $i = 1 \dots m$.

Задача 7. Пусть M — конечнопорождённый модуль над нётеровым кольцом R. Построим цепочку $0 = M_0 \subset \cdots \subset M_m = M$ так что $M_i/M_{i-1} \cong R/J_i$, где J_i — простые идеалы.

a) Пусть J_i — минимален по вложению в этой цепочке (то есть если $J_i \supset J_j$, то $J_i = J_j$). Докажите, что количество J_k, совпадающих с J_i равно длине модуля M_{J_i}, в частности, оно не зависит от выбора цепочки.

b) Приведите пример, когда количество прочих идеалов зависит от выбора цепочки.

Задача 8. Пусть теперь $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $J \subset R$ — идеал, $M = R/J$. Пусть множество $Z(J)$ разлагается на неприводимые компоненты $Z_1, \dots, Z_k$. Докажите, что $M_{I(Z_j)} \neq 0$ и длина $M_{I(Z_j)}$ конечна. Назовём длину этого модуля *кратностью* Z_j в J.

Определение 4 Пусть основное поле алгебраически замкнуто, Z — неприводимая компонента пересечения алгебраических многообразий $X_1, \ldots, X_k$. Назовём *кратностью пересечения* этих многообразий в Z кратность Z в $I(X_1) + \cdots + I(X_k)$.

Задача 9. Найдите кратности пересечения в нуле следующих пар кривых на плоскости:

a) $y = 0$, $y = x^n$, где $n > 0$.

b) $y = 0$, $y^2 = x^3$

c) $y^2 = x^3$, $y^3 = x^2$

Задача 10. Найдите кратности пересечения в нуле кривой и поверхности в пространстве:

a) $\{y = 0, x = z\}$ и $\{zy = x^2\}$

b) $\{y = x + z, 2x = 2y + z\}$ и $\{z = x^2 + y^2\}$

c) $\{y = x^3, z = x^2\}$ и $\{zy = x^2\}$

Задача 11. Найдите кратности пересечения двух поверхностей в пространстве (в соответсвующих кривых):

a) $\{y = 0\}$ и $\{zy = x^2\}$

b) $\{z = 0\}$ и $\{z = x^2 + y^2\}$

Задача 12*. Докажите, что прямую $x = z = 0$ невозможно задать на квадрике $xy = zt$ в $\mathbb{CP}^3$ одним дополнительным уравнением.

Задача 13. a) Пусть $X_1, \ldots, X_m \subset \mathbb{C}^n$ пересекаются в точке p, причём пересечение касательных пространств в этой точке равно нулю. Докажите, что кратность пересечения этих многообразий в p равна единице.

b) Докажите, что и наоборот, если кратность пересечения аффинных многообразий в точке равна единице, то пересечение их касательных пространств в этой точке равно нулю.

c^*) Пусть Z — неприводимая компонента пересечения аффинных многообразий X_i в $\mathbb{C}^n$. Докажите, что если в некоторой точке $p \in Z$ пересечение касательных пространств X_i совпадает с касательным пространством Z, то кратность пересечения $X_1, \ldots, X_m$ в Z равна единице.

Задача 14. Докажите, что если $X_1, \ldots, X_n \subset \mathbb{C}^n$ пересекаются в конечном наборе точек, причём пересечение касательных пространств в них равно нулю, то количество точек пересечения равно $(\deg X_1) \ldots (\deg X_n)$.