Экзамен

Задача 1. Пусть $l \subset \mathbb{CP}^3$ — прямая. Найдите количество плоскостей через l, содержащих касательную к кривой Веронезе $(x^3 : x^2y : xy^2 : y^3)$ для

a) $l = \{(0, a, b, 0)|a, b \in \mathbb{C}\}$, b) $l = \{(a, 0, 0, b)|a, b \in \mathbb{C}\}$, c) $l = \{(a, 0, a, b)|a, b \in \mathbb{C}\}$.

d) Какое максимально возможное конечное число таких плоскостей?

Задача 2. Пусть $I_p \subset \mathbb{Z}[x]$ — идеал многочленов, значения которых в нуле делятся на простое число $p \in \mathbb{Z}$.

a) Является ли идеал I_p^n примарным?

b) Представьте I_p^n пересечением неприводимых идеалов.

Задача 3. Вычислите кратность пересечения трёх поверхностей в $\mathbb{C}^3$, заданных уравнениями $x^3 = y^2$, $y^3 = z^2$, $z^3 = x^2$

a) в точке $(0, 0, 0)$, b) в остальных точках.

Задача 4. Вычислите

a) $\mathrm{Tor}_i(\mathbb{C}[x^{-1}, x], \mathbb{C}[x^{-1}, x])$ как модулей над $\mathbb{C}[x]$ для $i \geqslant 0$,

b) $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{C}[x^{-1}, x], \mathbb{C}[x]/(x - a)\mathbb{C}[x])$ как модулей над $\mathbb{C}[x]$ для $i \geqslant 0$.

Задача 5. Рассмотрим отображение $x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ из пучка гладких функций на плоскости в себя. Найдите у этого отображения

a) ядро; b) образ; c) коядро.