Экзамен

Задача 1. Какую кривую образуют пересечения касательных к кривой Веронезе $(x^3 : x^2y : xy^2 : y^3)$ и плоскость

a) $\{(0, a, b, c)|a, b, c \in \mathbb{C}\}$ b) $\{(a, 0, b, c)|a, b, c \in \mathbb{C}\}$.

c) Какие значения может принимать степень такой кривой?

d) Какие значения могут принимать степени её неприводимых компонент?

Задача 2. Представьте идеал I^N пересечением неприводимых идеалов для $I \subset \mathbb{Z}[x, y]$, составленного многочленами

a) делящимися на 5 при $x = y = 0$;

b) делящимися на 3 при $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 3. Вычислите кратность пересечения кривых в $\mathbb{C}^2$, заданных уравнениями $x^3 = y^2$, $y^3 - y = x^2$

a) в точке $(0, 0, 0)$, b) в остальных точках.

Задача 4. Вычислите

a) $\mathrm{Tor}_i(\mathbb{C}[x^{-1}, x]/\mathbb{C}[x], \mathbb{C}[x^{-1}, x]/\mathbb{C}[x])$ как модулей над $\mathbb{C}[x]$ для $i \geqslant 0$,

b) $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{C}[x^{-1}, x]/\mathbb{C}[x], \mathbb{C}[x])$ как модулей над $\mathbb{C}[x]$ для $i \geqslant 0$.

Задача 5. Рассмотрим отображение $x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$ из пучка гладких функций на плоскости в себя. Найдите у этого отображения

a) ядро; b) образ; c) коядро.