# 1. Многообразия

**Задача 1.** Докажите, что связное топологическое многообразие линейно связно.

**Задача 2.** Постройте пример нехаусдорфова топологического многообразия.

**Задача 3.** Докажите, что отношение эквивалентности между $C^r$-атласами — действительно отношение эквивалентности.

**Задача 4.** Пусть $\mathscr{A}$ — $C^r$-атлас на топологическом пространстве $M$, и пусть $\mathscr{F}$ — совокупность всех $C^r$-карт на $M$, согласованных с каждой картой из $\mathscr{A}$.
**1)** Покажите, что $\mathscr{F}$ — единственный максимальный $C^r$-атлас на $M$, содержащий $\mathscr{A}$.
**2)** Покажите, что два атласа эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же максимальном атласе. (Таким образом, определение $C^r$-структуры, данное на лекции, эквивалентно следующему: $C^r$-структура на $M$ — это максимальный $C^r$-атлас).

**Задача 5.** Постройте $C^\infty$-атлас на $n$-мерной сфере $S^n$, состоящий из двух карт.

**Задача 6.** Докажите, что на каждом гладком многообразии есть атлас, состоящий из карт, диффеоморфных $\mathbb{R}^n$.

**Задача 7.** Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — подмножество, обладающее тем свойством, что для любой $x \in M$ найдутся окрестность $U \ni x$, открытое множество $V \subset \mathbb{R}^k$ и гладкое инъективное отображение $\psi\colon V \to U$ ранга $k$, такое, что $M \cap U = \psi(V)$. Обязательно ли $M$ — подмногообразие в $\mathbb{R}^n$?

**Определение**. *Линейной группой Ли* называется подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$, являющаяся подмногообразием в пространстве $n \times n$-матриц $M_n(\mathbb{R})$.

**Задача 8.** Если $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ — подгруппа, то для того, чтобы она была подмногообразием, достаточно, чтобы подмногообразием было ее пересечение с какой-либо окрестностью единичного элемента.

**Задача 9.** Докажите, что следующие группы являются линейными группами Ли, и вычислите их размерности.
**1)** $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$; **2)** $O_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^\top = A^{-1}\}$; **3)** $SO_n = O_n \cap SL_n(\mathbb{R})$; **3)** $U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \bar{A}^\top = A^{-1}\}$; **4)** $SU_n = U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$.
*Указание.* Если подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ локально задается системой уравнений $f(x) = 0$, где $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, то для проверки максимальности ранга $f$ в $x_0$ (а скоро мы увидим, что и для других целей) удобно сначала вычислить ядро $df(x_0)$.

**Задача 10.** (*Многообразие Штифеля.*) **1)** Задайте структуру гладкого многообразия на множестве $V_{n,k}$ всех ортонормированных наборов $(e_1, \ldots, e_k)$ в $\mathbb{R}^n$.
**2)** Докажите, что $V_{n,k}$ компактно.

**Задача 11.** Какому из многообразий задач 1–7 диффеоморфно **1)** $V_{n,n}$? **2)** $V_{n,1}$? **3)** $V_{n,n-1}$?

**Задача 12.** Докажите, что проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ хаусдорфово, имеет счетную базу и компактно.

**Задача 13.** Докажите, что топология на $\mathbb{RP}^n$, определенная при помощи стандартного атласа, совпадает с фактортопологией, возникающей при отождествлении $\mathbb{RP}^n$ с фактормножеством $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

**Задача 14.** Задайте структуру гладкого многообразия на комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$.

**Задача 15.** Постройте диффеоморфизм $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$.

**Задача 16.** **1)** Докажите, что грассманиан $G_{n,k}$ является гладким многообразием размерности $k(n-k)$.
**2)** Докажите, что многообразие $G_{n,k}$ компактно.
**3)** Постройте диффеоморфизм $G_{n,k} \cong G_{n,n-k}$.