2. Касательное пространство. Дифференциал

Задача 1. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — подмногообразие, заданное в окрестности точки $x \in M$ уравнением $f(x) = 0$, где f — гладкое отображение в $\mathbb{R}^{n-k}$ постоянного ранга (см. прошлую лекцию). Постройте изоморфизм $T_xM \cong \operatorname{Ker} df(x)$.

Задача 2. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — подмногообразие, заданное в окрестности точки $x \in M$ параметризующим отображением $\psi\colon V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (см. прошлую лекцию). Постройте изоморфизм $T_xM \cong \operatorname{Im} d\psi(v)$ (где $v = \psi^{-1}(x)$).

Задача 3. Опишите касательные пространства в единице для линейных групп Ли **1)** $SL_n(\mathbb{R})$, **2)** O_n, **3)** SO_n, **4)** U_n и **5)** SU_n (см. прошлый листок).

Задача 4. Докажите, что локальное кольцо C^∞_x многообразия M в точке x локально (т.е. что идеал $\mathfrak{m}_x = \{f \in C^\infty_x : f(x) = 0\}$ — единственный максимальный идеал в C^∞_x).

Задача 5. Отождествим касательное пространство T_xM многообразия M в точке x с пространством $\operatorname{Der}(C^\infty_x, \mathbb{R})$ точечных дифференцирований алгебры C^∞_x и с пространством $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ (см. лекцию). Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Опишите его дифференциал $df(x)$ как отображение **1)** из $\operatorname{Der}(C^\infty_x, \mathbb{R})$ в $\operatorname{Der}(C^\infty_{f(x)}, \mathbb{R})$ и **2)** из $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ в $(\mathfrak{m}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}^2)^*$.

Задача 6. Пусть M — многообразие, $x \in M$, и пусть $v_1, \ldots, v_n$ — какой-либо базис в T_xM. Докажите, что $v_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ для некоторой системы координат $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности x.

Задача 7. Докажите, что отображения $S^n \to \mathbb{RP}^n$ и $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$, сопоставляющие точке x прямую, проходящую через 0 и x, имеют постоянный ранг n.

Задача 8. Формула $\varphi(x^0 : x^1 : x^2) = (x^0x^1 : x^0x^2 : x^1x^2)$ задает отображение из $\mathbb{RP}^2 \setminus B$ в $\mathbb{RP}^2$, где $B \subset \mathbb{RP}^2$ — некоторое подмножество (какое?). Вычислите ранг φ в каждой точке $\mathbb{RP}^2 \setminus B$.

Задача 9. Обозначим через $W_{n,k}$ множество всех линейно независимых наборов $(e_1, \ldots, e_k)$ в $\mathbb{R}^n$. Оно является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{nk}$ (почему?) и, следовательно, гладким многообразием («некомпактное многообразие Штифеля»).
1) Рассмотрим отображение $\pi\colon W_{n,k} \to G_{n,k}$, переводящее набор $(e_1, \ldots, e_k)$ в его линейную оболочку. Докажите, что оно гладкое.
2) Докажите, что всякая гладкая кривая γ на $G_{n,k}$ может быть поднята на $W_{n,k}$ в том смысле, что $\gamma = \pi \circ \tilde\gamma$ для некоторой гладкой кривой $\tilde\gamma$ на $W_{n,k}$.
3) Пусть $\xi \in T_VG_{n,k}$ — касательный вектор, представленный кривой γ, и пусть $\tilde\gamma$ — поднятие γ на $W_{n,k}$. Запишем $\tilde\gamma(t)$ в виде $\tilde\gamma(t) = (e_1(t), \ldots, e_k(t))$ и определим линейное отображение $\varphi_\xi\colon V \to \mathbb{R}^n/V$ формулой $e_i(0) \mapsto e_i'(0) + V$ $(i = 1, \ldots, k)$. Докажите, что φ_ξ зависит только от ξ (т.е. не зависит ни от поднятия $\tilde\gamma$ кривой γ, ни от выбора кривой γ в соответствующем классе эквивалентности).
4) Докажите, что отображение $\xi \mapsto \varphi_\xi$ — изоморфизм между $T_VG_{n,k}$ и $L(V, \mathbb{R}^n/V)$.