3. Погружения, вложения, подмногообразия

Задача 1. Докажите, что гладкое отображение $f\colon M \to N$ является субмерсией в точке $x \in M$ тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности x оно эквивалентно проекции $U \times V \to V$, $(x, y) \mapsto y$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые подмножества.

Задача 2. Докажите, что гладкое отображение $f\colon M \to N$ является погружением в точке $x \in M$ тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности x оно эквивалентно вложению $U \to U \times V$, $x \mapsto (x, 0)$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые подмножества.

Задача 3. Покажите, что погруженное подмногообразие не обязательно является подмногообразием.

Задача 4. 1) Докажите, что гладкое отображение $f\colon U \to V$, где U, V — открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, переводит множества меры 0 в множества меры 0.
2) Докажите, что если $f\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий и $\dim M < \dim N$, то $f(M)$ — множество меры 0 в N.
3) Докажите, что множество критических значений гладкой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет меру 0.

Задача 5. Найдите множество критических значений отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Для каких точек $c \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}(c)$ — подмногообразие в $\mathbb{R}^2$? Нарисуйте этот прообраз для различных c.

Задача 6. 1) Докажите, что биективное погружение — диффеоморфизм.
2) Докажите, что инъективное погружение $f\colon M \to N$ является вложением (т.е. гомеоморфизмом на $f(M)$) тогда и только тогда, когда $f(M)$ — подмногообразие в N.

Задача 7. Докажите, что произведение сфер $S^m \times S^n$ вкладывается в $\mathbb{R}^{m+n+1}$.

Векторные поля — I

Задача 8. На $\mathbb{RP}^2$ с однородными координатами $(x^0 : x^1 : x^2)$ введем локальные координаты $(u^1, u^2) = (x^1/x^0, x^2/x^0)$, $(v^1, v^2) = (x^0/x^1, x^2/x^1)$, $(w^1, w^2) = (x^0/x^2, x^1/x^2)$. Выразите векторные поля $\frac{\partial}{\partial u^1}$ и $\frac{\partial}{\partial u^2}$ в двух других системах координат.

Задача 9. 1) Докажите, что коммутатор $[a, b] = ab - ba$ на произвольном кольце удовлетворяет тождеству Якоби.
2) Докажите, что коммутатор дифференцирований — дифференцирование.
3) Докажите, что для векторных полей ξ, η и гладких функций f, g справедлива формула $[f\xi, g\eta] = fg[\xi, \eta] + f(\xi g)\eta - g(\eta f)\xi$.

Задача 10. Рассмотрим следующие векторные поля на $\mathbb{R}^2$: $e = x\frac{\partial}{\partial y}$, $f = y\frac{\partial}{\partial x}$, $h = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$.
1) Вычислите коммутаторы $[h, e]$, $[h, f]$ и $[e, f]$.
2) Покажите,что линейная оболочка этих полей образует трехмерную алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ 2×2-матриц с нулевым следом.