4. Векторные поля – II

Задача 1. Постройте интегральные кривые и опишите потоки следующих полей на плоскости: **1)** $x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$; **2)** $y\dfrac{\partial}{\partial x}-x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Задача 2. Пусть S^2 — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $n,s\in S^2$ — ее северный и южный полюса. Положим $M=S^2\setminus\{n,s\}$ и рассмотрим на M векторные поля X,Y, заданные следующим образом: X состоит из векторов единичной длины, касательных к меридианам (с севера на юг), а Y состоит из векторов единичной длины, касательных к параллелям (с запада на восток).
1) Запишите поля X,Y в локальных координатах, выбрав в качестве координат широту и долготу.
2) Вычислите коммутатор $[X,Y]$.
3) Найдите потоки g_t^X и g_t^Y этих полей. Определены ли они всюду на M?
4) Вычислите коммутатор потоков $f_{st}=g_s^X g_t^Y g_{-s}^X g_{-t}^Y$. Вычислите разность $x-f_{st}(x)$ (в координатах) с точностью до $o(s^2+t^2)$. Как эта разность связана с потоком поля $[X,Y]$?

Задача 3. Постройте три векторных поля X,Y,Z на трехмерной сфере S^3, которые в каждой точке $x\in S^3$ образуют базис касательного пространства T_xS^3.

Определение. Многообразие, на котором существует набор векторных полей $\xi_1,\dots,\xi_m$, в каждой точке $x\in M$ образующий базис касательного пространства T_xM, называется *параллелизуемым.*

Задача 4. Докажите, что любая линейная группа Ли параллелизуема.

Задача 5. Постройте векторное поле на нечетномерной сфере, нигде не обращающееся в нуль. (*Указание.* Можно попробовать записать какое-либо из полей задачи 3 в декартовых координатах на $\mathbb{R}^4$ и придумать аналогичную формулу для $\mathbb{R}^{2n}$).

Задача 6. Пусть два векторных поля на многообразии M касаются некоторого подмногообразия $N\subset M$ в каждой точке N. Докажите, что то же самое верно и для их коммутатора.

Задача 7. (*Обмотка тора.*) Пусть ξ — векторное поле на торе T^2, координаты которого (ξ^1,ξ^2) относительно системы угловых координат постоянны. При каких условиях на ξ^1,ξ^2 интегральные кривые поля ξ замкнуты? Что можно сказать об этих кривых в том случае, когда они не замкнуты?

Задача 8. (*Касательное расслоение*). Пусть M — гладкое многообразие, $m=\dim M$, и пусть $TM=\bigsqcup_{x\in M}T_xM=\{(x,\xi): x\in M,\ \xi\in T_xM\}$. Для каждой карты (U,φ) на M положим $\tilde U=\bigsqcup_{x\in U}T_xM$ и определим отображение $\tilde\varphi\colon\tilde U\to\mathbb{R}^{2m}$ формулой $\tilde\varphi(x,\xi)=(\varphi(x),d\varphi(x)\xi)$. Снабдим TM слабейшей топологией, в которой все отображения $\tilde\varphi$ непрерывны. Докажите, что семейство всех карт вида $(\tilde U,\tilde\varphi)$ образует атлас на TM, и что TM — гладкое многообразие размерности $2m$.

Определение. Построенное многообразие TM называется *касательным расслоением* многообразия M.

Определение. Пусть M — многообразие. *Гладким n-мерным векторным расслоением с базой M* называется следующая совокупность данных:

(1) многообразие E,

(2) гладкое отображение $p\colon E \to M$,

(3) структура n-мерного вещественного векторного пространства на каждом из множеств $p^{-1}(x)$, $x \in M$ (которое называется *слоем* над x),

удовлетворяющая следующему условию *локальной тривиальности*: для каждой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$ и диффеоморфизм $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативной (где pr_1 — проекция на первый сомножитель) и для каждого $x \in U$ индуцирующий изоморфизм векторных пространств $p^{-1}(x)$ и $\{x\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

Сечением расслоения (E, p) называется гладкое отображение $s\colon M \to E$, удовлетворяющее условию $p \circ s = \mathrm{id}_M$.

Задача 9. 1) Докажите, что касательное расслоение TM вместе с отображением $p\colon TM \to M$, $p(x, \xi) = x$, является векторным расслоением в смысле предыдущего определения.
2) Докажите, что гладкое векторное поле на M — это то же самое, что сечение касательного расслоения TM.

Определение. *Морфизм* векторных расслоений $\varphi\colon (E, p) \to (E', p')$ с базой M — это гладкое отображение $\varphi\colon E \to E'$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

коммутативной и линейное на каждом слое. *Изоморфизм* векторных расслоений — это морфизм, обладающий обратным. Векторное расслоение называется *тривиальным*, если оно изоморфно расслоению вида $(M \times \mathbb{R}^n, \mathrm{pr}_1)$.

Задача 10. Докажите, что многообразие параллелизуемо тогда и только тогда, когда его касательное расслоение тривиально.

Задача 11.* Докажите, что сфера S^2 не параллелизуема. (*Указание.* Какому классическому многообразию диффеоморфно множество касательных векторов к S^2 единичной длины? А какому другому классическому многообразию оно было бы диффеоморфно, если бы S^2 была параллелизуема?)