5. Векторные поля – III

Задача 1. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — диффеоморфизм, $\varphi^*\colon C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ — индуцированный им изоморфизм алгебр. Определим отображение $\varphi_*\colon \operatorname{Vect}(M) \to \operatorname{Vect}(N)$ формулой $\varphi_*(\xi)(y) = d\varphi(x)\xi(x)$, где $x = \varphi^{-1}(y)$, и положим $\varphi^\bullet = (\varphi^{-1})_*\colon \operatorname{Vect}(N) \to \operatorname{Vect}(M)$. Докажите, что при отождествлении $\operatorname{Vect}(M)$ с $\operatorname{Der}(C^\infty(M))$ (и аналогично для N) отображение $\varphi^\bullet$ действует по правилу $\varphi^\bullet(\xi) = \varphi^* \circ \xi \circ (\varphi^*)^{-1}$.

Задача 2. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_m$ — векторные поля на многообразии M размерности m, линейно независимые в каждой точке. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
1) $[\xi_i, \xi_j] = 0$ для всех i, j;
2) в окрестности каждой точки $x \in M$ найдется такая система координат $x^1, \dots, x^m$, что $\xi_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Задача 3. Проделайте оставшиеся шаги в доказательстве теоремы о связи между коммутатором векторных полей и (групповым) коммутатором их потоков (см. лекцию).

Задача 4. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гладкое отображение, ξ_1 и ξ_2 — векторные поля на M, η_1 и η_2 — векторные поля на N. Предположим, что ξ_1 φ-связано с η_1, а ξ_2 — с η_2. Докажите, что
1) $\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$ φ-связано с $\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
2) $[\xi_1, \xi_2]$ φ-связано с $[\eta_1, \eta_2]$.

Задача 5. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гладкое отображение, ξ — векторное поле на M. Докажите, что для существования векторного поля на N, φ-связанного с ξ, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $\operatorname{Im}\varphi^*$ было ξ-инвариантным.

Задача 6. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гладкое отображение, ξ — векторное поле на M, причем $d\varphi(x)\xi(x) = d\varphi(y)\xi(y)$, как только $\varphi(x) = \varphi(y)$. Обязательно ли существует векторное поле на N, φ-связанное с ξ?