6. Тензорные поля и производная Ли

Задача 1. 1) Запишите форму $f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)$ в полярных координатах.
2) Запишите форму $x\,dx+y\,dy+z\,dz$ в сферических координатах.

Задача 2. Пусть $\varphi\colon M\to N$ — гладкое отображение. Докажите, что $\varphi^*(df)=d(\varphi^*f)$ для любой $f\in C^\infty(N)$.

Задача 3. Отображение $\psi\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ задано формулой

$$\psi(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Вычислите $\psi^*\omega$, где **1)** $\omega=x\,dx+y\,dy$; **2)** $\omega=x\,dy-y\,dx$.

Задача 4. Дайте интерпретацию дифференциала $df(x)$ гладкой функции f как элемента пространства $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал локального кольца C_x^∞.

Задача 5. Пусть $G=GL_n(\mathbb{R})$. Поскольку G — открытое подмножество в $M_n(\mathbb{R})$, мы будем отождествлять пространство 1-форм $\Omega^1(G)$ с пространством гладких отображений $C^\infty(G,M_n(\mathbb{R}))$. Обозначим через $L_g\colon G\to G$ отображение $h\mapsto gh$. Постройте пример ненулевой 1-формы ω на G, инвариантной относительно всех преобразований L_g (т.е. такой, что $L_g^*\omega=\omega$ для всех $g\in G$). Ответ сформулируйте в терминах пространства $C^\infty(G,M_n(\mathbb{R}))$.

Задача 6. Докажите, что векторное поле ξ на многообразии M является гладким тогда и только тогда, когда для любой гладкой 1-формы ω на M функция $\omega(\xi)$ гладкая.

Задача 7. Обозначим через $\mathcal{T}_q^p(M)$ пространство тензорных полей типа (p,q) на многообразии M.
1) Постройте изоморфизм $C^\infty(M)$-модулей $\mathcal{T}_q^p(M)\cong \operatorname{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathcal{T}_p^q(M),C^\infty(M))$.
2) Докажите, что $C^\infty(M)$-модуль $\operatorname{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathcal{T}_p^q(M),\mathcal{T}_s^r(M))$ изоморфен некоторому модулю тензорных полей на M.

Задача 8. Выведите формулу для производной Ли тензорного поля в координатах.

Задача 9. Пусть ξ — векторное поле на многообразии, g_t — его локальный поток, T — тензорное поле. Докажите, что $\frac{d}{dt}(g_t^*T)=L_\xi(g_t^*T)=g_t^*(L_\xi T)$. (В частности, преобразование тензорных полей, индуцированное потоком векторного поля, коммутирует с производной Ли вдоль этого поля.)

Задача 10. Пусть T — тензорное поле типа (p,q) на многообразии M, $\omega_1,\ldots,\omega_p$ — 1-формы на M, $\xi,\xi_1,\ldots,\xi_q$ — векторные поля на M. Выразите значение производной Ли $L_\xi T$ на наборе $\omega_1,\ldots,\omega_p,\xi_1,\ldots,\xi_q$ через производные Ли 1-форм ω_i и полей ξ_i.

Задача 11. Определите *кокасательное расслоение* T^*M, следуя схеме задачи 8 из листка 4, и покажите, что гладкая 1-форма на M — это то же самое, что гладкое сечение расслоения T^*M.

Определение. Пусть $\mathscr{V}ect$ — категория конечномерных векторных пространств над $\mathbb{R}$. Ковариантный функтор $F\colon \mathscr{V}ect \to \mathscr{V}ect$ называется *гладким*, если все отображения $F_{V,W}\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F(V),F(W))$ — гладкие. Аналогично определяются гладкие контравариантные функторы и гладкие функторы нескольких переменных. (Примеры: $F(V)=V^*$, $F(V)=V\otimes V$, $F(V_1,V_2)=V_1\otimes V_2$, $F(V)=\bigwedge^p V$ и т.п.)

Задача 12.* **1)** Пусть $F\colon \mathscr{V}ect \to \mathscr{V}ect$ — гладкий функтор. Обозначим через $\mathscr{V}ect_M$ категорию гладких векторных расслоений с базой M (см. листок 4). Постройте функтор $F_M\colon \mathscr{V}ect_M \to \mathscr{V}ect_M$ таким образом, чтобы он на каждом слое сводился к применению функтора F. В частности, определите кокасательное расслоение T^*M, расслоения $(TM)^{\otimes p}\otimes (T^*M)^{\otimes q}$ и $\bigwedge^p T^*M$.
2) Докажите, что гладкое тензорное поле на M типа (p,q) — это то же самое, что гладкое сечение (см. листок 4) расслоения $(TM)^{\otimes p}\otimes (T^*M)^{\otimes q}$, а гладкая p-форма — то же самое, что гладкое сечение расслоения $\bigwedge^p T^*M$.

Градуированные алгебры. Алгебра Грассмана

Задача 13. 1) Во что превращаются обычные формулы для коммутатора (антикоммутативность и тождество Якоби), если коммутатор заменить градуированным коммутатором? Придумайте определение градуированной алгебры Ли.
2) Докажите, что градуированный коммутатор градуированных дифференцирований градуированной алгебры является градуированным дифференцированием.

Задача 14. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Отождествим пространство $\bigwedge^p V^*$ с $(\bigwedge^p V)^*$ (как на лекции), $(V^*)^{\otimes p}$ с $(V^{\otimes p})^*$ (канонически), а $(\bigwedge^p V)^*$ — с подпространством в $(V^{\otimes p})^*$ (канонически, посредством вложения, сопряженного к факторотображению $V^{\otimes p} \to \bigwedge^p V$). В итоге $\bigwedge^p V^*$ становится подпространством в $(V^*)^{\otimes p}$.
1) Куда при вложении $\bigwedge^p V^* \hookrightarrow (V^*)^{\otimes p}$ переходит элемент $v_1\wedge\ldots\wedge v_p$?
2) Чему равна композиция $\bigwedge^p V^* \hookrightarrow (V^*)^{\otimes p} \to \bigwedge^p V^*$ (где вторая стрелка — факторотображение)?