7. Дифференциальные формы

Задача 1. Пусть $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ — форма на $\mathbb{R}^3$.
1) Запишите ограничение $\omega|_{S^2}$ (где S^2 — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле) в координатах (θ, φ) (широта, долгота).
2) В каких точках S^2 форма $\omega|_{S^2}$ обращается в нуль?

Задача 2. Исследуйте, как изменяется при ортогональных преобразованиях форма
1) $dx \wedge dy$ на $\mathbb{R}^2$;
2) $x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ на $\mathbb{R}^3$.

Задача 3. Пусть $\omega = dx + x\,dy$ — форма на $\mathbb{R}^2$.
1) Можно ли представить ω (или хотя бы ее ограничение на какое-либо непустое открытое подмножество) в виде dg, где g — гладкая функция?
2) Можно ли представить ω (или хотя бы ее ограничение на какое-либо непустое открытое подмножество) в виде $f\,dg$, где f, g — гладкие функции?

Задача 4. Пусть $\omega = dx + y^2\,dz$ — форма на $\mathbb{R}^3$. Можно ли представить ω (или хотя бы ее ограничение на какое-либо непустое открытое подмножество) в виде $f\,dg$, где f, g — гладкие функции?

Задача 5. Пусть ω — 1-форма на многообразии, ξ, η — векторные поля. Докажите, что $d\omega(\xi, \eta) = \xi \cdot \omega(\eta) - \eta \cdot \omega(\xi) - \omega([\xi, \eta])$.

Задача 6. Определим *поле Картана* c на $\mathbb{R}^n$ формулой $c = \sum_i x^i \partial/\partial x^i$. Вычислите производную Ли $L_c\omega$, где ω — p-форма, все коэффициенты которой — однородные многочлены степени d.

Определение. Тензорное поле T на группе Ли G называется *левоинвариантным*, если $\ell_g^* T = T$ для всех $g \in G$, где $\ell_g \colon G \to G$, $\ell_g(h) = gh$ — левое умножение на g.

Задача 7. Пусть $G = \{x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3 : \sum_\alpha (x^\alpha)^2 = 1\}$ — группа кватернионов нормы 1. Будем рассматривать x^1, x^2, x^3 как локальные координаты в окрестности единицы. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — левоинвариантные векторные поля на G, значения которых в единице равны $\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3$ соответственно, и пусть $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ — левоинвариантные 1-формы на G, значения которых в единице равны dx^1, dx^2, dx^3 соответственно.
1) (*Структурные константы*). Докажите, что $[\xi_\alpha, \xi_\beta] = \sum_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta} \xi_\gamma$ для некоторых $c^\gamma_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$.
2) (*Уравнения Маурера–Картана*). Докажите, что $d\omega^\alpha$ — линейная комбинация форм $\omega^\beta \wedge \omega^\gamma$. Как связаны коэффициенты этой линейной комбинации с коэффициентами из п.1?
3) Вычислите коэффициенты $c^\gamma_{\alpha\beta}$.
4) Обобщите пп. 1 и 2 на случай произвольных групп Ли.