8. Операции над тензорными полями. Разбиение единицы

Задача 1. Пусть ξ — векторное поле на многообразии M. Докажите, что оператор вставки $i_\xi\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ является единственным градуированным дифференцированием степени -1, удовлетворяющим условию $i_\xi(\omega) = \omega(\xi)$ для каждой $\omega \in \Omega^1(M)$.

Задача 2. Пусть ξ — векторное поле на многообразии M. Докажите, что производная Ли $L_\xi\colon \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ — единственное градуированное дифференцирование бистепени $(0,0)$ (это означает, что L_ξ переводит $\mathcal{T}^p_q(M)$ в $\mathcal{T}^p_q(M)$ для всех p,q), коммутирующее со следом $\mathrm{Tr}^1\colon \mathcal{T}^p_q(M) \to \mathcal{T}^{p-1}_{q-1}(M)$ и удовлетворяющее условию $L_\xi(\eta) = [\xi, \eta]$ для каждого векторного поля η.

Задача 3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ — открытое подмножество. Докажите коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} C^\infty(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(U) \\ C^\infty(U) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & \mathrm{Vect}(U) \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & \mathrm{Vect}(U) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "\mathrm{div}"] & C^\infty(U) \arrow[u, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

где α_1 (соответственно, α_2) — изоморфизм, переводящий базисные векторные поля $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ в 1-формы dx, dy, dz (соответственно, в 2-формы $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$), а α_3 — изоморфизм, действующий по правилу $f \mapsto f\,dx \wedge dy \wedge dz$.

Задача 4. Найдите ротор поля скоростей точек пространства $\mathbb{R}^3$, вращающегося вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью ω.

Задача 5. Докажите, что для каждого открытого покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$ многообразия M найдется такое разбиение единицы $\{\psi_i\}_{i\in I}$, что $\operatorname{supp}\psi_i \subset U_i$ для всех $i \in I$ (т.е., в отличие от теоремы, доказанной на лекции, функции ψ_i занумерованы тем же множеством индексов, что и элементы покрытия, но уже не требуется, чтобы они имели компактные носители).

Задача 6. Докажите, что для любых замкнутых непересекающихся подмножеств A, B гладкого многообразия M найдется такая функция $f \in C^\infty(M)$, что $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f|_A = 0$ и $f|_B = 1$. Выведите отсюда, что гладкое многообразие является нормальным топологическим пространством.

Задача 7. Пусть N — замкнутое подмногообразие многообразия M. Докажите, что каждая гладкая функция на N продолжается до гладкой функции на M.

Задача 8. Пусть M — связное многообразие. Докажите, что для любых $x, y \in M$ существует такой диффеоморфизм $\varphi\colon M \to M$, что $\varphi(x) = y$.

Задача 9. Пусть M — гладкое многообразие, обладающее конечным атласом[1]. Докажите, что

$$\mathcal{T}^p_q(M) \cong \mathrm{Vect}(M)^{\otimes p} \otimes \Omega^1(M)^{\otimes q} \qquad (\text{где } \otimes = \otimes_{C^\infty(M)}); \tag{1}$$

$$\Omega^p(M) \cong \bigwedge\nolimits^p_{C^\infty(M)} \Omega^1(M). \tag{2}$$

[1] На самом деле каждое многообразие обладает конечным атласом; см. W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, curvature, and cohomology*, vol. I, Academic Press, New York and London, 1972.

Задача 10. 1) Пусть M — гладкое многообразие. Докажите, что любой ненулевой гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ имеет вид $f \mapsto f(x_0)$ для некоторой (единственной) точки $x_0 \in M$.
2) Пусть $\alpha\colon C^\infty(M) \to C^\infty(N)$ — гомоморфизм алгебр. Докажите, что существует единственное гладкое отображение $\varphi\colon N \to M$ такое, что $\alpha = \varphi^*$.
3) Назовем $\mathbb{R}$-алгебру *гладкой*, если она изоморфна алгебре гладких функций на некотором многообразии. Докажите, что категория, объектами которой являются всевозможные гладкие алгебры, а морфизмами — произвольные гомоморфизмы между ними, эквивалентна категории, противоположной к категории гладких многообразий и гладких отображений между ними. В частности, алгебры $C^\infty(M)$ и $C^\infty(N)$ изоморфны тогда и только тогда, когда M и N диффеоморфны.