9. Дифференциальные формы. Интегрирование по цепям

Задача 1. Пусть ω — p-форма на многообразии M. Докажите, что для любых векторных полей $\xi_0, \ldots, \xi_p$ на M справедлива формула

$$(d\omega)(\xi_0, \ldots, \xi_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p).$$

Указание: воспользуйтесь формулой гомотопии Картана и индукцией по p.

Задача 2. Вычислите $\int x\,dy - y\,dx$ вдоль кривой, соединяющей точки $(0,0)$ и $(1,2)$ **1)** по отрезку; **2)** по дуге параболы $y = 2x^2$; **3)** по ломаной $(0,0) \to (1,0) \to (1,2)$.

Задача 3. Сделайте то же, что в предыдущей задаче, для формы $x\,dy + y\,dx$.

Задача 4. Вычислите $\int xy^2\,dy - x^2y\,dx$ по дуге окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$.

Задача 5. Вычислите $\int (x^2 + 7y)\,dx + (-x + y\sin y^2)\,dy$ по ломаной $(0,0) \to (1,1) \to (0,2) \to (-1,1)$.

Задача 6. Определите (разумным образом) работу силы вдоль пути как интеграл некоторой 1-формы.

Задача 7. Найдите работу ньютонова поля $F = k\vec{r}/|r|^3$ вдоль произвольного пути, соединяющего две точки в $\mathbb{R}^3$.

Задача 8. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi)$ — полярный угол.
1) Докажите, что 1-форма $d\varphi$ продолжается до гладкой 1-формы на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (обозначаемой по традиции тем же символом $d\varphi$).
2) Вычислите $d\varphi$ в декартовых координатах (ср. задачу 3, п.2 из листка 6).
3) Для $R > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим кривую $c_{R,n}(t) = (R\cos 2\pi nt, R\sin 2\pi nt)$ $(t \in [0,1])$. Вычислите $\int_{c_{R,n}} d\varphi$.
4) Является ли $d\varphi$ дифференциалом какой-либо гладкой функции на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?
5) Является ли $c_{R,n}$ границей какого-нибудь сингулярного двумерного куба в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Определение. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — непрерывная замкнутая кривая. Запишем $\gamma(t)$ в виде $\gamma(t) = (R(t)\cos\varphi(t), R(t)\sin\varphi(t))$, где R, φ — непрерывные функции. *Числом вращения* (или *индексом*) кривой γ относительно точки $(0,0)$ называется число

$$\operatorname{wn}\gamma = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi}.$$

(Интуитивно, число вращения — это число оборотов против часовой стрелки, описываемых вектором $O\gamma(t)$ при изменении t от 0 до 1.)

Задача 9. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — непрерывная замкнутая кривая, $\gamma(0) = \gamma(1) = (R, 0)$. Докажите, что γ гомотопна (в классе непрерывных кривых с той же начальной и конечной точками) кривой $c_{R,n}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ (см. п.3 задачи 1), и что такое n единственно и равно $\operatorname{wn}\gamma$.

Задача 10. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — непрерывная замкнутая кривая. Докажите, что существует единственное $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $\gamma - c_{1,n} = \partial c$ для некоторого сингулярного двумерного куба c в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, и что $n = \operatorname{wn} \gamma$.

Задача 11. Докажите *«основную теорему алгебры»* (всякий отличный от константы многочлен над $\mathbb{C}$ имеет корень) по следующей схеме:

Пусть $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ (где $a_i \in \mathbb{C}$) — многочлен, не имеющий корней. Докажите, пользуясь предыдущими задачами, что $\operatorname{wn}(f \circ c_{R,1}) = n$ для достаточно больших R, а потом посмотрите, что происходит при малых R.