# 10. Плотности и римановы метрики

**Задача 1.** Пусть $V$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $n = \dim V$, $T$ — линейный оператор в $V$. Докажите, что $\bigwedge^n T$ — умножение на $\det T$. Выведите отсюда, что для любых базисов $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ в $V$ имеет место равенство $e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n = (\det C)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где $C$ — матрица перехода от $(e_i)$ к $(e'_i)$.

**Задача 2.** Докажите, что непрерывная плотность на многообразии $M$ — это то же самое, что отображение $\rho$ из множества $\mathrm{Vect}^n(M)$ $n$-поливекторных полей на $M$ в $C(M)$, удовлетворяющее условию $\rho(fu) = |f|\rho(u)$ для всех $u \in \mathrm{Vect}^n(M),\ f \in C^\infty(M)$.

**Задача 3.** Докажите, что $C^\infty(M)$-модуль гладких плотностей на многообразии $M$ изоморфен $C^\infty(M)$ [*предостережение:* но канонического изоморфизма в общем случае нет].

**Задача 4.** Не используя теорему Уитни, докажите, что на любом многообразии существует риманова метрика.

**Задача 5.** Пусть $M$ — поверхность (двумерное подмногообразие) в $\mathbb{R}^3$, параметризованная посредством гладкого отображения $r\colon U \to \mathbb{R}^3$, где $U$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $(u, v)$ декартовы координаты в $U$; их же можно считать координатами на $M$. Снабдим $M$ римановой метрикой $g$, индуцированной из $\mathbb{R}^3$ (она называется *первой квадратичной формой* поверхности $M$).
**1)** Докажите, что $g = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$, где $E = (r_u, r_u)$, $F = (r_u, r_v)$, $G = (r_v, r_v)$.
**2)** Докажите, что соответствующая плотность объема на $M$ задается формулой $|dV| = |[r_u \times r_v]||du\, dv|$ (где крестик означает векторное произведение).

**Задача 6.** Пусть $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $F'_z(p_0) \neq 0$. По теореме о неявной функции, пересечение множества $\{p \in \mathbb{R}^3 : F(p) = 0\}$ с некоторой окрестностью точки $p_0$ является подмногообразием $M$ в $\mathbb{R}^3$, и декартовы координаты $(x, y)$ точки $p = (x, y, z) \in M$ можно рассматривать как координаты на $M$. Вычислите риманову метрику и плотность объема на $M$ в координатах $(x, y)$.

**Задача 7.** Сделайте то же, что в предыдущей задаче, в случае, когда поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ — график гладкой функции $f\colon U \to \mathbb{R}$ (где $U$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$).

**Задача 8.** Вычислите риманову метрику в $\mathbb{R}^3$ и ее ограничение на единичную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ в сферических координатах.

**Задача 9.** Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — единичная сфера, $N = (0, 0, 1)$ — ее северный полюс. Введем координаты $(x, y)$ на $S^2 \setminus \{N\}$, полагая их для $p \in S^2 \setminus \{N\}$ равными декартовым координатам стереографической проекции точки $p$ на $\mathbb{R}^2$. Вычислите риманову метрику на $S^2$ в координатах $(x, y)$.

**Определение 1.** *Расширенная комплексная плоскость* — это множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Дробно-линейным преобразованием* называется отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$.

**Задача 10.** Отождествим $S^2$ с $\overline{\mathbb{C}}$ посредством стереографической проекции.

**1)** Какие дробно-линейные преобразования сохраняют метрику на $S^2$?

**2)** Постройте изоморфизм $SU_2/\{\pm 1\} \cong SO_3$.

**Задача 11.** Обозначим через $\mathbb{R}^{1,2}$ пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами $(t, x, y)$ и псевдоримановой метрикой $g = dt^2 - dx^2 - dy^2$. *Псевдосферические координаты* $(\rho, \chi, \varphi)$ в области $t^2 - x^2 - y^2 > 0$ определяются формулами

$$t = \rho \operatorname{ch} \chi, \quad x = \rho \operatorname{sh} \chi \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sh} \chi \sin \varphi \qquad (\rho \in \mathbb{R},\ \chi > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi]).$$

Вычислите $g$ и ее ограничение на верхнюю чашку $(t > 0)$ *единичной псевдосферы*

$$\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{1,2} : t^2 - x^2 - y^2 = 1\}$$

в псевдосферических координатах. Убедитесь, что $-g$ — риманова метрика на верхней чашке псевдосферы. Аналогичным образом постройте риманову метрику на нижней чашке.

**Задача 12.** Рассмотрим стереографическую проекцию псевдосферы на плоскость $t = 0$ из южного полюса $(0, 0, -1)$ (так что верхняя чашка псевдосферы отобразится на единичный круг $\mathbb{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, а нижняя — на его внешность $x^2 + y^2 > 1$). Будем рассматривать $(x, y) \in \mathbb{D}$ как координаты на верхней чашке псевдосферы посредством стереографической проекции (как в задаче 9). Вычислите риманову метрику на псевдосфере (определенную в предыдущей задаче) в координатах $(x, y)$. Соответствующая ей метрика на $\mathbb{D}$ называется *метрикой Лобачевского*.

**Задача 13.** Отобразим верхнюю полуплоскость $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\mathbb{D}$ посредством дробно-линейного отображения

$$\varphi(z) = i \, \frac{z - i}{z + i}.$$

Убедитесь, что $\varphi$ — диффеоморфизм $\mathscr{H}$ на $\mathbb{D}$, и вычислите метрику $\varphi^* g$ на $\mathscr{H}$, где $g$ — метрика Лобачевского на $\mathbb{D}$ (см. предыдущую задачу). Метрика $\varphi^* g$ также называется *метрикой Лобачевского* на $\mathscr{H}$.