11. Ориентация. Интегрирование на многообразиях

Задача 1. Сколько существует ориентаций на несвязном ориентируемом многообразии?

Задача 2. Докажите, что все группы Ли ориентируемы.

Задача 3. Пусть M — многообразие. *Ориентирующее накрытие* $\tilde{M}$ многообразия M определяется следующим образом. Как множество $\tilde{M}$ состоит из всех пар виде (x, ε_x), где $x \in M$ и ε_x — ориентация на T_xM. Для каждой карты (U, φ) на M и каждого $x \in U$ обозначим через ε_x^φ ориентацию на T_xM, перенесенную из $T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$ посредством $d\varphi(x)$. Положим

$$U' = \{(x, \varepsilon_x^\varphi) : x \in U\}, \qquad U'' = \{(x, -\varepsilon_x^\varphi) : x \in U\},$$

и зададим отображения

$$\varphi' \colon U' \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi'' \colon U'' \to \mathbb{R}^n,$$
$$\varphi'(x, \varepsilon_x^\varphi) = \varphi(x), \quad \varphi''(x, -\varepsilon_x^\varphi) = \varphi(x).$$

Снабдим $\tilde{M}$ слабейшей топологией, в которой отображения φ' и φ'' (для всевозможных карт (U, φ) на M) непрерывны.
1) Докажите, что $\tilde{M}$ — гладкое многообразие, и что отображение $\pi \colon \tilde{M} \to M$, $\pi(x, \varepsilon_x) = x$, является гладким двулистным накрытием. Оно называется *ориентирующим накрытием* M.
2) Докажите, что ориентация M — это то же самое, что непрерывное (или, что в данном случае эквивалентно, гладкое) сечение ориентирующего накрытия.
3) Докажите, что каждое односвязное многообразие ориентируемо.

Определение. Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое подмножество. Функция $f \colon U \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной* (или *аналитической*), если в окрестности каждой точки $z_0 \in U$ она разлагается в сходящийся степенной ряд: $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha (z - z_0)^\alpha$.

Задача 4. Дайте определение комплексно-аналитического многообразия и докажите, что все комплексно-аналитические многообразия ориентируемы как вещественные многообразия.

Задача 5. Проверьте, что для нечетного n ориентация на $\mathbb{RP}^n$, построенная на лекции, действительно является ориентацией (т.е. что ориентации касательных пространств $T_x(\mathbb{RP}^n)$ согласованы).

Задача 6. Пусть $\varphi_0, \varphi_1 \colon M \to N$ — гомотопные диффеоморфизмы многообразий (т.е. существует такое гладкое отображение $\Phi \colon [0,1] \times M \to N$, что $\Phi(0, \cdot) = \varphi_0$, $\Phi(1, \cdot) = \varphi_1$ и $\Phi(t, \cdot) \colon M \to N$ — диффеоморфизм для всех $t \in [0,1]$). Предположим, что M и N ориентированы. Докажите, что если φ_0 сохраняет ориентацию, то и φ_1 сохраняет ориентацию.

Задача 7. Докажите, что лист Мёбиуса неориентируем.

Задача 8. 1) Вычислите форму объема на торе $T^2 \subset \mathbb{R}^3$, полученном вращением окружности радиуса a с центром в точке $(0, 0, b)$ вокруг оси Oz.
2) Вычислите площадь поверхности этого тора.

Задача 9. Докажите, что форма объема на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задается формулой

$$dV = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^{n+1},$$

где $x^1, \ldots, x^{n+1}$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$. В частности, форма из задачи 1 листка 7 — это форма площади на S^2.

Задача 10. Вычислите площадь двумерной сферы.

Задача 11. Зададим отображение $\varphi \colon S^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ формулой $\varphi(x, r) = rx$. Докажите, что

$$\varphi^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n+1}) = r^n p_1^*(dV) \wedge p_2^*(dr),$$

где p_1, p_2 — проекции на 1-ый и 2-й сомножители, а dV — форма объема на S^n.

Задача 12.* При каких k, n ориентируем грассманиан $G_{n,k}$?