12. Интегрирование на многообразиях

Задача 1. Докажите, что площадь ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей C можно вычислять по формуле
$$S = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx.$$

Задача 2. Пусть $\omega = x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$.
1) Вычислите интеграл от ω по кривой $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z=0$.
2) Вычислите интеграл от $d\omega$ по поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geqslant 0$.

Задача 3. Пусть $\omega = y\,dx + z\,dy + x\,dz$.
1) Вычислите интеграл от ω по кривой $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+z=a$.
2) Вычислите интеграл от $d\omega$ по поверхности $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\ x+z=a$.

Задача 4. Вычислите интеграл по эллипсоиду $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ от форм
$$(1)\quad dx\wedge dy;\quad (2)\quad z\,dx\wedge dy;\quad (3)\quad z^2\,dx\wedge dy;\quad (4)\quad \frac{dy\wedge dz}{x}+\frac{dz\wedge dx}{y}+\frac{dx\wedge dy}{z}.$$

Задача 5. Вычислите интеграл по верхней половине ($z\geqslant 0$) того же эллипсоида от форм
1) $x^3\,dy\wedge dz$; **2)** $yz\,dz\wedge dx$.

Задача 6. Выразите площадь $n-1$-мерной сферы через объем n-мерного шара.

Задача 7. [ср. с задачей 8 из листка 9]. Зададим 2-форму ω в $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ равенством
$$\omega = \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

1) Докажите, что $d\omega = 0$.
2) Чему равно ограничение ω на сферу S^2_r радиуса r с центром в нуле?
3) Выразите ω через форму площади на сфере S^2_1.
4) Является ли ω дифференциалом какой-либо 1-формы?
5) Докажите, что $\omega(p)(u,v) = \langle p,u,v\rangle/|p|^3$ (где угловые скобки означают смешанное произведение).
6) Пусть $M\subset\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ — компактное двумерное подмногообразие с краем. Предположим, что каждый луч, исходящий из 0, пересекает M не более одного раза. Обозначим через $C(M)$ объединение всех таких лучей, пересекающих M. *Телесным углом*, стягиваемым многообразием M, называется площадь области $C(M)\cap S^2_1$. Докажите, что эта площадь равна модулю интеграла ω по M.

Задача 8. 1) Вычислите прообраз формы объема на единичной сфере S^n при антиподальном отображении $\iota\colon S^n\to S^n$, $\iota(x)=-x$.
2) Докажите, что для четного n антиподальное отображение $\iota\colon S^n\to S^n$ не гомотопно тождественному. (*Указание.* Воспользуйтесь п. 1 и формулой Стокса.)
3) Докажите, что для четного n на S^n не существует векторного поля, нигде не обращающегося в нуль. (*Указание.* Предположите, что оно существует, и постройте гомотопию между ι и тождественным отображением.)

Случай римановых многообразий

Определение. *Спаривание* векторных пространств V и W над полем K — это билинейное отображение $f\colon V \times W \to K$, удовлетворяющее следующим условиям *невырожденности*:
1) для каждого $0 \neq v \in V$ найдется такой $w \in W$, что $f(v,w) \neq 0$;
2) для каждого $0 \neq w \in W$ найдется такой $v \in V$, что $f(v,w) \neq 0$.

Каждое спаривание $f\colon V \times W \to K$ порождает вложения

$$\begin{aligned} i_f\colon V \to W^*, &\quad i_f(v)(w) = f(v,w); \\ i'_f\colon W \to V^*, &\quad i'_f(w)(v) = f(v,w). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если хотя бы одно из пространств V, W конечномерно, то таково же и второе, и i_f, i'_f — изоморфизмы.

В дальнейшем все векторные пространства предполагаются конечномерными.

Пример. Для стандартного спаривания $f\colon V^* \times V \to K$, $(\omega, v) \mapsto \omega(v)$, изоморфизм $i_f\colon V^* \to V^*$ — тождественное отображение, а изоморфизм $i'_f\colon V \to V^{**}$ — канонический изоморфизм со вторым сопряженным.

Задача 9. Пусть $f\colon V \times W \to K$ — спаривание. Докажите, что отображение

$$f\colon \bigwedge^p V \times \bigwedge^p W \to K, \quad f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, w_1 \wedge \ldots \wedge w_p) = \det(f(v_i, w_j)),$$

является спариванием.

Определение. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$ размерности n, снабженное ориентацией ε и скалярным произведением $g\colon V \times V \to V$ (невырожденным, но не обязательно положительно определенным). *Форма объема* $\omega \in \bigwedge^n V^*$ задается формулой

$$\omega(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \varepsilon(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)\sqrt{|\det(g(v_i, v_j))|}.$$

Если V — касательное пространство к ориентированнмоу псевдориманову многообразию M в точке x_0, то ω — это значение формы объема dV на M в x_0 (см. лекцию).

Задача 10. Покажите, что сквозное отображение

$$h\colon \bigwedge^p V \times \bigwedge^{n-p} V \xrightarrow{\wedge} \bigwedge^n V \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$$

является спариванием.

Определение. *Оператор Ходжа* $*\colon \bigwedge^p V^* \to \bigwedge^{n-p} V^*$ определяется как композиция

$$\bigwedge^p V^* \xrightarrow{i_g^{-1}} \bigwedge^p V \xrightarrow{i_h} \bigwedge^{n-p} V^*.$$

Если M — ориентированное псевдориманово многообразие, то *оператор Ходжа* $*\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ задается формулой $(*\,\omega)(x) = *(\omega(x))$.

Задача 11. Проверьте, что форма $*\,\omega$ действительно является гладкой.

Задача 12. Выразите оператор $*$ в координатах.

Обозначение. Пусть (M,g) — псевдориманово многообразие. Определим отображение

$$i_g\colon \operatorname{Vect}(M)\to\Omega^1(M),\quad (i_g\xi)(x)=i_{g(x)}\xi(x).$$

Из предыдущего следует, что i_g — изоморфизм $C^\infty(M)$-модулей.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения $\check{\xi}=i_g(\xi)$ и $\hat{\omega}=i_g^{-1}(\omega)$ для $\xi\in\operatorname{Vect}(M)$, $\omega\in\Omega^1(M)$.

Определение. *Градиентом* функции $f\in C^\infty(M)$ на псевдоримановом многообразии M называется векторное поле $\operatorname{grad} f=\widehat{df}$.

Определение. *Диверегенцией* векторного поля ξ на ориентированном псевдоримановом многообразии M называется функция $\operatorname{div}\xi=(*\,d\,*)(\check{\xi})$.

Задача 13. Убедитесь, что для $M=\mathbb{R}^3$ данные выше определения градиента и дивергенции совпадают с обычными их определениями (см. лекцию).

Задача 14. Вычислите градиент и дивергенцию в координатах.

Задача 15. Пусть M — ориентированное риманово многообразие, $D\subset M$ — открытое относительно компактное множество с гладкой границей, F — векторное поле на $\overline{D}$. Дайте определение внешней нормали ν к ∂D (см. лекцию для случая $M=\mathbb{R}^3$) и докажите формулу

$$\int_{\overline{D}}\operatorname{div}F\,dV=\int_{\partial D}(F,\nu)\,dS,$$

где dV, dS — формы объема на M и ∂D соответственно.

Задача 16. Электромагнитное поле описывается двумя величинами — вектором электрической напряженности E и вектором магнитной напряженности H. В вакууме (для простоты — при отсутствии зарядов) эти величины связаны *уравнениями Максвелла*

$$\begin{cases}\operatorname{rot}E=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H}{\partial t},\\ \operatorname{div}H=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}\operatorname{rot}H=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t},\\ \operatorname{div}E=0.\end{cases}$$

Пусть $\mathbb{R}^{1,3}$ — пространство Минковского с координатами $x^0=ct,x^1,x^2,x^3$ и псевдоримановой метрикой $g=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$. Введем в рассмотрение 2-форму

$$F=-E_1\,dx^0\wedge dx^1-E_2\,dx^0\wedge dx^2-E_3\,dx^0\wedge dx^3+H_1\,dx^2\wedge dx^3+H_2\,dx^3\wedge dx^1+H_3\,dx^1\wedge dx^2.$$

Покажите, что уравнения Максвелла эквивалентны уравнениям $dF=0$, $d(*\,F)=0$.