13. Когомологии де Рама

Задача 1. Пусть $\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ — форма на $\mathbb{R}^3$. Укажите какую-нибудь форму σ, для которой $d\sigma = \omega$.

Задача 2. Докажите, что произведение замкнутой формы на точную форму — точная форма.

Задача 3. Пусть M — гладкое многообразие, ω — замкнутая 1-форма на M. Докажите, что интегралы от ω по гомотопным (с фиксированными концами) путям в M совпадают.

Задача 4. Пусть M — односвязное многообразие. Докажите, что $H^1_{\mathrm{DR}}(M) = 0$.

Задача 5. Пусть M — компактное ориентируемое многообразие без края, $n = \dim M$. Докажите, что $H^n_{\mathrm{DR}}(M) \neq 0$.

Задача 6. Вычислите когомологии де Рама
1) плоскости с двумя проколами;
3) плоскости с n проколами;
4) проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$;
5) проективного пространства $\mathbb{RP}^n$;
6) тора T^2.

Задача 7. Для замкнутой формы $\omega \in \Omega^1(T^2)$ положим $\rho_1(\omega) = \int_{\{a\}\times S^1} \omega$ и $\rho_2(\omega) = \int_{S^1\times\{a\}} \omega$.
1) Докажите, что $\rho_1(\omega)$ и $\rho_2(\omega)$ не зависят от $a \in S^1$.
2) Докажите, что ω точна тогда и только тогда, когда $\rho_1(\omega) = \rho_2(\omega) = 0$.

Задача 8. Придумайте критерий точности форм старшей степени на **1)** S^n; **2)** T^2.

Задача 9. Выразите оператор гомотопии $H\colon \Omega^p(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ (см. лекцию) в координатах.

Задача 10. Пусть c — поле Картана на $\mathbb{R}^n$ (см. листок 6).
1) Докажите, что производная Ли $L_c\colon \Omega^p(\mathbb{R}^n) \to \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ — изоморфизм при $p > 0$.
2) Пользуясь п. 1 и формулой Картана, получите еще одно доказательство леммы Пуанкаре.