Экзамен

Задача 1. Пусть ω — $(n-1)$-форма на n-мерном компактном ориентируемом многообразии M без края. Покажите, что $d\omega(x) = 0$ в некоторой точке $x \in M$.

Задача 2. Вычислите интеграл

$$\int_M \frac{dx \wedge dz}{y+z},$$

где поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнением $x^2 + 2xz + 4z^2 + 2yz + y^2 = 2$. Поясните, что в данном случае следует понимать под интегралом (форма не определена всюду на M).

Задача 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — двумерная ориентированная поверхность (возможно, с краем), заданная уравнением $f(x, y, z) = 0$, где f — гладкая функция на $\mathbb{R}^3$, $df \neq 0$ на M. Обозначим через dS форму площади на M, а через ν — вектор внешней нормали к M. Пусть ω — 2-форма в $\mathbb{R}^3$, и пусть функция g определена условием $df \wedge \omega = g\, dx \wedge dy \wedge dz$. Выразите $\omega|_M$ через g, $df(\nu)$ и dS.

Задача 4. Пусть $G = SL_2(\mathbb{R})$ — группа всех 2×2-матриц с определителем 1. Введем функции x^1, x^2, x^3 на G формулами

$$x^1(A) = a_{11}, \quad x^2(A) = a_{12}, \quad x^3(A) = a_{21} \qquad \text{для } A = (a_{ij}) \in G.$$

1) Докажите, что функции x^1, x^2, x^3 образуют систему координат в некоторой окрестности единичного элемента.
2) Обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3 левоинвариантные векторные поля на G, однозначно определенные условиями $\xi_i(e) = (\partial/\partial x^i)(e)$. Покажите, что коммутатор $[\xi_i, \xi_j]$ является линейной комбинацией полей ξ_1, ξ_2, ξ_3, и вычислите коэффициенты этой линейной комбинации для каждых i, j.
3) Обозначим через $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ правоинвариантные 1-формы на G, однозначно определенные условиями $\omega^i(e) = dx^i(e)$. Покажите, что $d\omega^i$ является линейной комбинацией форм $\omega^1 \wedge \omega^2$, $\omega^1 \wedge \omega^3$, $\omega^2 \wedge \omega^3$, и вычислите коэффициенты этой комбинации для каждого i.
4) Пусть $g_t^{\xi_i}$ — потоки полей ξ_i ($i = 1, 2, 3$). Найдите явную формулу для $g_t^{\xi_i}(x)$ для каждого $x \in G$.
5) Положим $h_{ij} = g_{-t}^{\xi_j} g_{-t}^{\xi_i} g_t^{\xi_j} g_t^{\xi_i}$. Найдите явные формулы для $h_{12}(x)$ и $h_{23}(x)$ для каждого $x \in G$. Убедитесь, что $h_{ij}(x) = g_{t^2}^{[\xi_i, \xi_j]}(x) + o(t^2)$ при $t \to 0$ для $(i, j) = (1, 2)$ и $(i, j) = (2, 3)$.
6) Рассмотрим 1-форму $\omega(x) = \operatorname{tr}(x)\, \omega_1(x) + \omega_2(x)$. Для $i = 1, 2$ покажите, что производная Ли $L_{\xi_i}(\omega)$ равна $f_i^1 \omega_1 + f_i^2 \omega_2$ для некоторых функций f_i^1, f_i^2. Найдите явные формулы для этих функций.

Задача 5. Пусть M — связное многообразие, $f\colon M \to M$ — гладкое отображение, удовлетворяющее условию $f \circ f = f$. Докажите, что $f(M)$ — подмногообразие в M.