Анализ на многообразиях, 2 курс 14.02.2010

Повторный экзамен

Задача 1. Вычислите интеграл

$$\int_S xz^2\,dy\wedge dz + yx^2\,dz\wedge dx + zy^2\,dx\wedge dy,$$

где S — граница множества в $\mathbb{R}^3$, задаваемого неравенствами

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az,\ x^2+y^2 \geqslant 3z^2,\ x \geqslant y.$$

Является ли S многообразием? Если нет, то объясните, что следует понимать под интегралом, и обоснуйте свои вычисления.

Задача 2. Пусть ξ — векторное поле на многообразии M, и пусть D — градуированное дифференцирование алгебры $\Omega(M)$ степени 0, обладающее свойствами $Df=\xi f$ и $D(df)=d(Df)$ для любой $f\in C^\infty(M)$. Докажите, что $D=L_\xi$ — производная Ли вдоль ξ.

Задача 3. Пусть $M=M_{mn}(\mathbb{R})$ — пространство всех $(m\times n)$-матриц над $\mathbb{R}$, и пусть $0\leqslant r\leqslant \min\{m,n\}$. Какие из следующих подмножеств в M являются подмногообразиями? В случаях, когда ответ положителен, вычислите размерность соответствующего подмногообразия.
1) $\{A\in M : \mathrm{rk}(A)\geqslant r\}$; **2)** $\{A\in M : \mathrm{rk}(A)\leqslant r\}$; **3)** $\{A\in M : \mathrm{rk}(A)=r\}$.

Задача 4. Пусть G — линейная группа Ли.
1) Докажите, что левоинвариантные формы образуют подкомплекс $\Omega_{\mathrm{inv}}(G)$ в комплексе де Рама $\Omega(G)$.
2) Вычислите когомологии комплекса $\Omega_{\mathrm{inv}}(G)$ для $G=SL_2(\mathbb{R})$.
3) Докажите, что производная Ли левоинвариантной формы на G вдоль левоинвариантного векторного поля есть левоинвариантная форма.
4) Обозначим через H^p пространство всех таких $\omega\in\Omega^p_{\mathrm{inv}}(G)$, что $L_\xi\omega=0$ для всех левоинвариантных векторных полей ξ. Вычислите пространства H^p для $G=SL_2(\mathbb{R})$.

Задача 5. Пусть $\gamma\colon I\to M$ — непостоянная максимальная интегральная кривая гладкого векторного поля на многообразии M. Докажите, что следующие условия эквивалентны:
(1) $\gamma(I)$ — компакт;
(2) $\gamma(I)$ — подмногообразие в M, диффеоморфное окружности;
(3) γ — не инъекция.

Задача 6. Пусть $M\subset\mathbb{R}^2$ — график функции $y=|x|$, $C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M, т.е. таких функций $f\colon M\to\mathbb{R}$, которые продолжаются до гладкой функции, определенной на некоторой окрестности M в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что алгебры $C^\infty(M)$ и $C^\infty(\mathbb{R})$ не изоморфны.