"ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ"

Г. Колюцкий, Д. Филимонов, А. Фишкин, И. Щуров

Задачи к лекции 10

1. Покажите, что если циклы на решении автономного аналитического дифференциального уравнения в $\mathbb{C}^2$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1}$$
гомотопны как кривые с фиксированными (совпадающими друг с другом) началом и концом, и гомотопия не проходит через особые точки, то отображения последования вдоль этих циклов совпадают.
2. Покажите, что если циклы l и l' на решении автономного аналитического дифференциального уравнения из задачи 1 свободно гомотопны, и гомотопия не проходит через особые точки, то ростки отображений последования вдоль этих циклов Δ_l и $\Delta_{l'}$ в точках пересечения трансверсалей с циклами аналитически сопряжены друг другу, т.е. для некоторого ростка биголоморфной функции H справедливо равенство
$$H \circ \Delta_l \circ H^{-1} = \Delta_{l'}$$
Докажите следствие: свободно гомотопные циклы на решении являются одновременно тождественными или предельными.
3. Покажите, что если решение уравнения (1) отлично от прямой $\{x = const\}$, то нули многочлена $Q(x,y)$ лежат на нём дискретно.
4. Проверьте, что
$$\exp\left(\int_{x_0}^{x} f_y(t, y(t,u))dt\right) = \frac{H_y(x_0,u)}{H_y(x, y(x,u))},$$
где $y(t,u)$ — решение задачи Коши для гамильтонова уравнения
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{H_x(x,y)}{H_y(x,y)} =: f(x,y)$$
с начальным условием $y(x_0) = u$. Предполагается, что при $t \in [x_0, x]$ решение определено и аналитично.

НМУ, ОСЕНЬ 2009 ГОДА

5. Пусть Ω_n — пространство полиномиальных 1-форм от 2 переменных
$$\Omega_n = \{A(x,y)dx + B(x,y)dy | A, B \in \mathbb{C}[x,y], \deg A, \deg B \leq n\},$$
а Ω'_n — подпространство точных форм. Посчитайте размерность фактора Ω_n/Ω'_n.
6. Пусть $n+1$ прямая на вещественной плоскости находится в общем положении (прямые попарно пересекаются, и никакие три не пересекаются в одной точке). Пусть $H(x,y)$ — многочлен степени $n+1$, равный произведению линейных функций, задающих эти прямые. Покажите, что у автономного гамильтонова уравнения на плоскости с гамильтонианом H имеется ровно n^2 вещественных особых точек, из них $n(n+1)/2$ сёдел, а остальные — центры.