"ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ"

Г. Колюцкий, Д. Филимонов, А. Фишкин, И. Щуров

Задачи к лекции 12

1. Рассмотрим векторное поле $v(x, y)$ с конечным числом особых точек (нулей векторного поля). Заменяя каждый вектор в неособой точке на прямую, на которой лежит этот вектор, получаем поле направлений (с конечным числом особых точек, в которых направление не определено). Скажем, что поле направлений является *аналитическим*, если оно получается из аналитического векторного поля.

   Доказать, что типичное поле направлений на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, задаваемое полиномиальным векторным полем
   $$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y), \end{cases}$$
   продолжается до аналитического поля направлений (с конечным числом особых точек) на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Найти условия типичности.

   Подсказка. Перейти к проективной карте в окрестности бесконечности: $u = 1/x,\ v = y/x$.
2. Сколько может быть особых точек в полицикле в типичном k-параметрическом семействе гладких векторных полей на сфере? Дать точную оценку.
3. (*Желательно сделать к следующей лекции!*) Рассмотрим фазовый портрет

   а) Стандартного седла (здесь $\lambda > 0$)
   $$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -\lambda y. \end{cases}$$
   б) Стандартного седлоузла
   $$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$
   Вычислить отображение соответствия Δ с полутрансверсали $\Sigma_{in} = \{x > 0,\ y = 1\}$ на полутрансверсаль $\Sigma_{out} = \{x = 1,\ y > 0\}$.

НМУ, ОСЕНЬ 2009 ГОДА