"ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ"

Г. Колюцкий, Д. Филимонов, А. Фишкин, И. Щуров

Задачи к лекции 6

1. Пусть f — целая 1-периодической функция, отличная от константы, и $a < b$ — произвольные вещественные числа. Обозначим через $\Pi_\alpha(a,b)$ прямоугольник
$$\Pi_\alpha(a,b) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, a \le \operatorname{Re} z \le b, -\alpha \le \operatorname{Im} z \le \alpha\}\,.$$
Доказать, что найдутся такие положительные C_1 и C_2, что для любого $\alpha > 0$ будет выполнено:
$$\max_{\Pi_\alpha(a,b)} |f| \ge C_1 e^{C_2\alpha}.$$
Подсказка: воспользуйтесь теоремой о нулях и росте.
2. Сформулируйте и докажите аналог теоремы о нулях и росте для случая, когда U — круговое кольцо, а все остальные условия те же, что и в теореме. Попробуйте обобщить теорему на случай, когда U — произвольная неодносвязная область с кусочно-гладкой границей. Цель: не получить наилучшую оцеку, а получить любое утверждение, аналогичное теореме о нулях и росте.
3. Пусть в обозначениях из теоремы о неравенстве Гронуолла $U = \Delta_R(0)$ (R-окрестность начала координат), $z : [a,b] \to U$ — решение уравнения
$$\dot z = g(t,z) \qquad (1)$$
с начальным условием $z(a) = 0$, и при этом известно, что $|z(t)| < r < R$. Докажите, что если
$$|x| \le e^{-L(b-a)}(R-r),$$
то решение уравнения (1) с начальным условием $z(a) = x$ существует в U для всех $t \in [a,b]$.
4. Рассмотрим аналитическое векторное поле в окрестности начала координат на $\mathbb{R}^2$. Пусть оно имеет в начале координат особую точку типа центр или фокус по линейным членам:
$$\begin{cases} \dot x &= \lambda x - y + ... \\ \dot y &= x + \lambda y + ... \end{cases}$$

НМУ, ОСЕНЬ 2009 ГОДА

а) Покажите, что на малом интервале $(0, \varepsilon)$ оси Ox определено отображение Пуанкаре.

б) Покажите, что оно продолжается до аналитической функции в некоторой окрестности точки 0 в $\mathbb{C}$.