"ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ"

Г. Колюцкий, Д. Филимонов, А. Фишкин, И. Щуров

Экзамен

1. Предложите функцию Ляпунова для обобщённых уравнений Льенара.
2. Опишите все случаи, при которых возможно построение выталкивающих стандартных квадратичных областей для обобщённых уравнений Льенара. В этих случаях постройте сами области.
3. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — круговое кольцо, $K \subset U$ — его связное компактное подмножество и функция f голоморфна в U и непрерывна в $\overline{U}$. Пусть также $m = \max\limits_K |f|$ и $M = \max\limits_U |f|$.
   a. Докажите аналог теоремы о нулях и росте для этого случая, т.е. оцените сверху число нулей функции f на K через m, M и некоторые «геометрические параметры», определяемые по множествам K и U.
   b. Докажите аналог теоремы о нулях и росте для случая, когда U — произвольная неодносвязная область, а все остальные условия сохраняются.
4. Пусть $U = \Delta_R(0)$ — R-окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Пусть $z : [a,b] \to U$ — решение дифференциального уравнения
$$\dot{z} = g(t,z), \tag{1}$$
   определенное на отрезке $t \in [a,b]$ и удовлетворяющее начальному условию $z(a) = 0$. Известно, что $|z(t)| < r < R$. Докажите, что если
$$||x|| \leq e^{-L(b-a)}(R-r),$$
   где L — константа Липшица для $g(t,x)$ по x в U, то решение уравнения (1) с начальным условием $z(a) = x$ существует в U для всех $t \in [a,b]$.
5. Рассмотрим аналитическое векторное поле в окрестности начала координат на $\mathbb{R}^2$. Пусть оно имеет в начале координат особую точку типа центр или фокус по линейным членам:
$$\begin{cases} \dot{x} = & \lambda x - y + \cdots, \\ \dot{y} = & x + \lambda y + \cdots, \end{cases}$$

НМУ, ОСЕНЬ 2009 ГОДА

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

а) Покажите, что на малом интервале $(0, \varepsilon)$ оси Ox определено отображение Пуанкаре.

б) Покажите, что оно продолжается до аналитической функции в некоторой окрестности точки 0 в $\mathbb{C}$.

6. Рассмотрим векторное поле $v(x, y)$ с конечным числом особых точек (нулей векторного поля). Заменяя каждый вектор в неособой точке на прямую, на которой лежит этот вектор, получаем поле направлений (с конечным числом особых точек, в которых направление не определено). Скажем, что поле направлений является *аналитическим*, если оно получается из аналитического векторного поля.

   Доказать, что типичное поле направлений на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, задаваемое полиномиальным векторным полем

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y), \end{cases}$$

   продолжается до аналитического поля направлений (с конечным числом особых точек) на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Найти условия типичности.

   Подсказка. Перейти к проективной карте в окрестности бесконечности: $u = 1/x,\ v = y/x$.

7. Отображение соответствия $x \mapsto y$ для конечно-гладкой нормальной формы семейства, содержащего резонансное седло, задается соотношением:

$$0 = m \log y + \int_{x^m}^{y^n} \frac{du}{u\, P_\mu(u, \lambda)},\ \ x > 0,\ \ y > 0, \tag{2}$$

   где $P_\mu(u, \lambda) = \pm u^\mu (1 + \lambda_\mu u^\mu) + W_{\mu-1}(u, \lambda)$.

   Здесь $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\mu)$ — это набор параметров, которые считаются фиксированными.

   Наконец, $W_{\mu-1}(u, \lambda) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_{\mu-1} z^{\mu-1}$ — многочлен Вейерштрасса степени $\mu - 1$.

   Найти *пфаффово уравнение*, т.е. дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами:

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0,$$

   которому удовлетворяет заданное таким образом отображение.

   Вычислить его степень (степенью пфаффова уравнения называется максимальная степень многочленов, являющихся коэффициентами дифференциальной формы в левой части уравнения. Например, форма $(x^2 + xy)dx + (x^2 + xy^3)dy$ имеет степень 4).