А. Л. ГОРОДЕНЦЕВ

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА КУРСА «ГЕОМЕТРИЯ»

Первый семестр

Тема 1. Координатное пространство $\mathbb{R}^n$ (2 занятия). Мотивирующий пример — геометрия $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$: ориентированная площадь и ориентированный объём; различные определения прямых и плоскостей; «школьные» соотношения инцидентности между ними; скалярное произведение и расстояние; вычисление расстояний, углов, площадей и объёмов в задачах про прямые, плоскости и точки. Аксиоматика Вейля: пространство точек и пространство векторов; действия с векторами; существование базиса и размерность векторного пространства. Двойственные векторные пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n*}$, двойственность $V \supset U \leftrightarrow \operatorname{Ann} U \subset V^*$. Геометрическая теория линейных уравнений: отыскание базиса в векторном подпространстве, заданном системой линейных уравнений и/или как линейная оболочка системы векторов; размерность сумм и пересечений векторных и аффинных подпространств.

Тема 2. Ориентированный объём и определители (1 занятие). Ориентированный объём параллелепипеда — это однородная функция, инвариантная относительно заваливания параллелепипеда на бок с сохранением высоты[1]. Ориентированный объём полилинеен и пропорционален определителю матрицы[2] координат направляющих векторов рёбер. Миноры и m-мерный ориентированный объём в n-мерном пространстве; пространство полилинейных косых форм; грассмановы многочлены.

Тема 3. Евклидова геометрия (2 занятия). Скалярное произведение. Ортогональное проектирование на подпространство, метод наименьших квадратов, ортогонализация, существование ортонормальных базисов. Матрица Грама системы векторов и её поведение при замене координат; положительность определителя Грама, неравенство Коши – Буняковского – Шварца, определитель Грама равен квадрату ориентированного объёма. Вычисление длин и углов; гиперплоскости; сферы; радиус вписанного и описанного шаров заданного симплекса; метрические критерии принадлежности набора точек сфере и/или гиперплоскости. Отражения; ортогональная группа порождается отражениями; собственное ортогональное преобразование 3-мерного евклидова векторного пространства является поворотом относительно прямой[3]; конечные подгруппы в $\mathrm{SO}(3)$ и платоновы тела; простота $\mathrm{SO}(3)$.

Тема 4. Выпуклая геометрия (2 занятия). Барицентрические комбинации и барицентрические координаты, группирование масс. Опорные полупространства, грани и крайние точки; выпуклость внутренности и замыкания выпуклой фигуры; замкнутая относительно конечных положительных барицентрических комбинаций своих точек фигура является пересечением своих опорных полупространств. Геометрическая теория систем линейных неравенств и отыскание максимума аффинно линейной формы на многограннике (симплекс-метод). Выпуклая оболочка конечного набора точек является компактным пересечением конечного числа полупространств и наоборот. Двойственные многогранники. Выпуклые полиэдральные конусы — проективная версия теории компактных выпуклых многогранников.

---

[1] т. е. гауссова элементарного преобразования, добавляющего к одному вектору кратность другого

[2] этот сюжет никоим образом не является заменой темы «определители» из курса алгебры и является лишь геометрической мотивировкой и/или иллюстрацией оной; для курса геометрии нужно понятие объёма и возможность писать некоторые формулы в терминах определителей; техника вычисления определителей, детерминантные тождества типа Гамильтона – Кэли и проч. важные свойства нами не затрагиваются

[3] если дело пойдёт — то можно тут же обобщить и в старшие размерности, но, может быть, лучше отнести это в курс линейной алгебры

Тема 5. Проективная геометрия (3 занятия). Проективизация векторного пространства; глобальные однородные и локальные аффинные координаты. Топология маломерных пространств: $\mathbb{RP}_1 = S^1$, $\mathbb{RP}_2 =$ «лист Мёбиуса с заклеенной диском границей», $\mathbb{RP}_3 = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ и $\mathbb{CP}_1 = S^2$. Словарик «линейная алгебра[1] – проективная геометрия», включающий двойственность, проекции и линейную проективную группу, а также интерпретацию аффинной геометрии (барицентрические координаты и т. п.) как локальный аффинный срез проективной. Дробно линейные преобразования прямой, двойное отношение; действие $\mathrm{SO}(3)$ на $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ дробно линейными преобразованиями; над алгебраически замкнутым полем любое биективное отображение

$$\mathbb{P}_1 \smallsetminus (\text{конечное множество точек}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \smallsetminus (\text{конечное множество точек})\ ,$$

заданное в однородных координатах рациональными функциями, является дробно рациональным изоморфизмом. Игры с плоскими кониками, пучками прямых, построениями одной линейкой, пучками коник и с теоремой Паскаля; геометрия поризма Понселе.

Второй семестр

Тема 6. Проективные квадрики (2 занятия). Квадрики на $\mathbb{P}_1$. Касательные прямые, касательное пространство, пространство особых точек. Всякая квадрика является линейным соединением пространства особых точек с неособой квадрикой в дополнительном подпространстве. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики; поляритеты совпадают тогда и только тогда, когда уравнения квадрик пропорциональны. Проективное пространство квадрик, касательное пространство к гиперповерхности особых квадрик в гладкой точке q состоит из всех квадрик, проходящих через (единственную) особую точку квадрики q. Важные примеры детерминантных квадрик: коника Веронезе, поверхность Сегре и квадрика Плюккера $\mathrm{Gr}(2,4) \subset \mathbb{P}_5$. Линейные подпространства, лежащие на квадрике. Классификация комплексных и вещественных проективных и аффинных квадрик с точностью до проективного (соотв. аффинного) преобразования.

Тема 7. Ортогональная геометрия невырожденной симметричной билинейной формы над произвольным полем (1–2 занятия[2]). Ортогональные разложения и отражения; всякое ортогональное преобразование n-мерного пространства является композицией $\leqslant 2n$ отражений в гиперплоскостях. Гиперболические пространства; всякое изотропное подпространство содержится в гиперболическом; вложение полной линейной группы максимального изотропного подпространства в ортогональную группу гиперболического пространства; пример — геометрия гиперболической плоскости, гиперболические повороты и гиперболические функции. Разложение пространства в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного; единственность такого разложения (теорема Витта); ортогональная группа транзитивно действует на гиперболических и на изотропных подпространствах заданной размерности.

Тема 8. Неевклидовы геометрии (2 занятия). Долой псевдо-школьную казуистику[3] и дифф-гемные заморочки: речь идёт о вещественной геометрии неизотропных точек проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, ассоциированного с векторным пространством V (над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$) с невырожденной формой сигнатуры (m,n) (эрмитово симметричной, если V над $\mathbb{C}$) ; геодезические — это проективизации вещественных линейных подпространств, а длины, углы, площади, объёмы между ними тривиально вычисляются через скалярное произведение в V; «абсолют» — это

[1] тут, конечно, желательно, чтобы аксиоматика абстрактного векторного пространства над произвольным полем и понятие линейного оператора уже были обсуждены в курсе алгебры с надлежащими примерами (пространство многочленов, пространство функций, пространство матриц, пространство линейных операторов)

[2] это зависит от сопряжения с курсом алгебры

[3] «аксиомы», «. . . ическую тригонометрию» и т. п.

вещественная проективная квадрика изотропных векторов. Примеры: 2-мерная сферическая геометрия на $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ (с формой сигнатуры $++$ на $\mathbb{C}^2$); 2-мерные плоскости Лобачевского в виде диска Бельтрами – Клейна на $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ (с формой сигнатуры $++-$ на $\mathbb{R}^3$) и двух дисков Пуанкаре на $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ (с формой сигнатуры $+-$ на $\mathbb{C}^2$); вычисления в этих геометриях длин, углов, площадей; примеры движений, движения порождаются отражениями.

Тема 9. Геометрия кватернионов и спиноров (1–2 занятия[1]). Комплексные 2×2 матрицы и кватернионы. Сопряжение данным кватернионом q является поворотом трёхмерного евклидова пространства чисто мнимых кватернионов на угол $2\mathrm{Arg}\,(q)$ вокруг оси $\mathrm{Im}\,(q)$. Универсальные накрытия $\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(4)$. Спинорное разложение 4-мерного евклидова пространства, два семейства келеровых структур на $\mathbb{R}^4$, параметризованные множеством прямых (т. е. $S^2 \sqcup S^2$) на квадрике Сегре.

Тема 10. Геометрия грассманианов (3 занятия). Локальные аффинные и глобальные однородные координаты на грассманиане, клеточное разбиение комплексных и вещественных грассманианов, введение в исчисление Шуберта, базисный пример: $\mathrm{Gr}(2,4)$ и геометрия прямых в $\mathbb{P}_3$. Касательное пространство, касательное, кокасательное и тавтологические под- и фактор-расслоения. Изотропные грассманианы квадратичных и симплектических форм. Неевклидовы геометрии на грассманианах, ассоциированных с комплексными и кватернионными пространствами, снабжёнными (неопределённым эрмитово симметричным) скалярным произведением — развитие и обобщение сюжетов из темы «неевклидова геометрия».

Тема 11. Отступление о гомотопиях и фундаментальных группах (1–2 занятия[2]). Гомотопии (в предположении, что понятия непрерывных отображений многомерных пространств уже были в курсе анализа), пример: гомотопии между клетками Шуберта, вырождения клеток и их пересечений. Определение фундаментальной группы. Теорема Зейферта – Ван Кэмпена (в предположении, что представление групп образующими и соотношениями хоть отчасти знакомо по курсу алгебры). Фундаментальные группы окружности, двумерных многообразий, вещественных проективных пространств и грассманианов (наглядно-геометрическое изложение). Накрытия, универсальное накрытие.

[1]это тоже зависит от сопряжения с курсом алгебры

[2]этот сюжет — своего рода отклик на пожелания А. Б. Сосинского и нек. др. членов метод-правления; на мой вкус серьёзное изложение теории накрытий и фундаментальных групп уместнее *в курсе анализа* (примерно в это же время, в качестве первого вводного шага в анализ на многообразиях — скажем, разобрать за 2-3 занятия книжку Масси про классификацию двумерных многообразий); ведь основные математические трудности тут носят обще-топологический характер и преодолеваются рассуждениями, типичными именно для анализа (которые далее будут использованы в тфкп и в многомерном анализе); в любом случае этот сюжет очень сильно привязан к курсу анализа