Задачи по группам Ли – 2

1. а) Выпишите в глобальных координатах на группе Ли $GL_2(\mathbb{R})$ левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля. **б)** Тот же вопрос для группы Ли верхнетреугольных матриц $n \times n$.

2. а) Докажите, что на любой группе Ли G существует левоинвариантная мера (дифференциальная форма старшей степени). **б)** Докажите, что эта форма также правоинвариантна тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathfrak{g}$ след оператора $\operatorname{ad} x$ равен нулю.

3. а) Докажите, что для нильпотентной группы Ли экспоненциальное отображение открыто и сюръективно. **б)** Приведите примеры, когда эти условия нарушаются.

4. Докажите, что на верхней полуплоскости $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$ не существует структуры голоморфной группы Ли.

5. а) Докажите, что любая связная компактная голоморфная группа Ли абелева. **б)** Опишите все связные компактные голоморфные группы Ли комплексной размерности 1 с точностью до изоморфизма.

6. Является ли присоединенное представление группы **а)** $SO_3(\mathbb{R})$; **б)** SU_2; **в)** SU_3 неприводимым? точным?

7. а*) Вычислите дифференциал экспоненциального отображения $\exp : \mathfrak{g} \to G$ в точке $x \in \mathfrak{g}$. (*Указание:* воспользуйтесь формулой Кэмпбелла–Хаусдорфа–Дынкина.) **б)** В каких точках этот дифференциал вырожден?