Задачи по группам Ли – 3

1. а) Докажите, что автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ образуют группу Ли (обозначаемую $Aut(\mathfrak{g})$). **б)** Покажите, что ее касательная алгебра есть алгебра $Der(\mathfrak{g})$ дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{g}$. **в)** Докажите, что группа $Int(\mathfrak{g})$ внутренних автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является виртуальной подгруппой в группе $Aut(\mathfrak{g})$. **г)** Приведите пример, когда группа внутренних автоморфизмов $Int(\mathfrak{g})$ не является подгруппой Ли в группе $Aut(\mathfrak{g})$.

2. Докажите, что универсальная накрывающая группы Ли $SL_2(\mathbb{R})$ не имеет точного конечномерного линейного представления.

3. а) Выпишите в локальной координате на комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ поля скоростей действия группы $PGL_2(\mathbb{C})$. **б)** Докажите, что алгебра $D(\mathbb{CP}^1)$ голоморфных дифференциальных операторов на комплексной проективной прямой порождается этими полями скоростей. **в)** Пусть $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2 \in U(sl_2)$ – элемент Казимира. Докажите, что $D(\mathbb{CP}^1) = U(sl_2)/(C = 0)$.