Задачи по группам Ли – 4

1. а) Опишите все орбиты присоединенного представления 3-мерной группы Гейзенберга. **б)** Тот же вопрос для коприсоединенного представления (двойственного к присоединенному). **в)** Те же вопросы для группы Ли $SO_3(\mathbb{R})$.

2. а) Пусть $ZU(\mathfrak{g})$ – центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ связной группы Ли G. Покажите, что $L_*(ZU(\mathfrak{g})) = R_*(ZU(\mathfrak{g})) = D(G)^{G\times G}$ – алгебра биинвариантных дифференциальных операторов на группе Ли G. **б)** Покажите, что $L_*(U(\mathfrak{g})) \cap R_*(U(\mathfrak{g})) = D(G)^{G\times G}$.

3. а) Найдите все дифференциальные операторы на евклидовой плоскости, инвариантные относительно всех ее движений. **б)** Тот же вопрос для плоскости Лобачевского.

4. а) Докажите, что действие компактной группы Ли H аффинными преобразованиями на аффинном пространстве сохраняет меру Лебега на этом пространстве. (*Указание:* рассмотрите представление группы H в старшей внешней степени соответствующего векторного пространства). **б)** Докажите, что действие компактной группы Ли H аффинными преобразованиями на аффинном пространстве имеет неподвижную точку. (*Указание:* рассмотрите центр масс какой-нибудь орбиты). **в)** Пусть V – вещественное (соотв. комплексное) векторное пространство и H – подгруппа Ли в $GL(V)$. Покажите, что на V есть H-инвариантная положительно определенная квадратичная (соотв. эрмитова) форма тогда и только тогда, когда H компактна. **г)** Пусть подгруппа Ли $H \subset G$ не содержит нормальных делителей G. Докажите, что на однородном пространстве $X = G/H$ существует G-инвариантная риманова метрика тогда и только тогда, когда группа H компактна.

5. Пусть G – компактная группа Ли. Покажите, что форма Киллинга соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ неположительно определена.