Задачи по группам Ли – 5

1. Вычислите **а)** $H^*_{dR}(SO_3(\mathbb{R}))$; **б)** $H^*_{dR}(SO_4(\mathbb{R}))$.

2. Группа Ли $SU_n(\mathbb{H})$ состоит из $n \times n$-матриц A с коэффициентами в алгебре кватернионов $\mathbb{H}$, таких, что $A\overline{A}^T = E$ (сопряжение в алгебре кватернионов) и $\det_{\mathbb{R}} A = 1$ (где $\det_{\mathbb{R}}$ – детерминант A как вещественной матрицы $4n \times 4n$). **а)** Докажите, что если пространство $\mathbb{H}^n$ рассматривать как $\mathbb{C}^{2n}$, то $SU_n(\mathbb{H})$ есть пересечение $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ и SU_{2n}. **б)** Докажите, что алгебра Ли группы $SU_n(\mathbb{H})$ есть компактная вещественная форма алгебры Ли $sp_{2n}(\mathbb{C})$. **в)** Докажите, что группа $SU_n(\mathbb{H})$ односвязна.

3. Докажите, что следующие группы Ли изоморфны **а)** $SO_3(\mathbb{R})$ и $SU_2/\{\pm 1\}$; **б)** $SO_4(\mathbb{R})$ и $(SU_2 \times SU_2)/\{\pm 1\}$; **в)** $SO_5(\mathbb{R})$ и $SU_2(\mathbb{H})/\{\pm 1\}$; **г)** $SO_6(\mathbb{R})$ и $SU_4/\{\pm 1\}$.

4. Найдите все вещественные формы алгебры Ли $sl_2(\mathbb{C})$ с точностью до изоморфизма.