Задачи по группам Ли – 6

1. а) Пусть V – точное представление компактной группы Ли G. Покажите, что любое неприводимое представление группы G содержится в некоторой тензорной степени представления V. **б)** Разложите на неприводимые представление связной компактной группы Ли G в пространстве полиномиальных функций на пространстве флагов G/T.
2. а) Докажите, что решетка весов полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть решетка характеров максимального тора соответствующей односвязной компактной группы. **б)** Докажите, что центр односвязной компактной группы изоморфен фактору решетки весов по решетке корней.
3. а) Докажите, что максимальная нильпотентная подгруппа $N \subset G_{\mathbb{C}}$ действует на пространстве флагов $G_{\mathbb{C}}/B$ с открытой орбитой. **б)** Докажите, что число орбит группы N на $G_{\mathbb{C}}/B$ конечно, и каждая из них диффеоморфна векторному пространству (т.е. получается клеточное разбиение пространства флагов). **в)** Докажите, что орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы Вейля $W = N(T)/T$.