Задачи для экзамена по курсу “Асимптотическая теория представлений”. Осенний семестр 2009

Пожалуйста, решите любые 3 задачи по Вашему выбору. Решение можно передать мне в любом читабельном виде 18 декабря в НМУ в обычное время 17:30 или отправить на мой адрес olsh2007@gmail.com (pdf или ps). Срок с моей стороны не лимитируется – но если Вы хотите отложить надолго, то согласуйте, пожалуйста, с Учебной частью.

1. Докажите предложение 2.14: для $N = 1, 2, \ldots,\ 0 \leqslant L \leqslant N$:

$$\begin{aligned} s_{(1^L 0^{N-L})}(u_1, \ldots, u_N) &= e_L(u_1, \ldots, u_N); \\ s_{(L,0,\ldots,0)}(u_1, \ldots, u_N) &= h_L(u_1, \ldots, u_N). \end{aligned} \tag{0.1}$$

2. Вычислите коэффициенты в разложении

$$s_\mu h_k = \sum_{\lambda \in \mathrm{Part}} (?) s_\lambda,$$

$$s_\mu e_k = \sum_{\lambda \in \mathrm{Part}} (?) s_\lambda,$$

где $\mu \in \mathrm{Part}$, $s_\mu \in \Lambda$ — симметрическая функция Шура, $k = 1, 2, \ldots,$ и $h_k, e_k \in \Lambda$ — полные однородные и элементарные симметрические функции.

3. (Упражнение 4.3) Докажите непосредственно, без использования предложения 4.11, что функции h_k^* и e_k^* (определение 4.7) являются сдвинуто-симметрическими по переменным $y_1, y_2, \ldots$.

4. Выведите из тождества Коши (5.31) формулу Якоби-Труди (5.35).

5. (Упражнение 5.6) Покажите, что если семейство вероятностных мер $\{M_N\}$ на полупрямой имеет равномерно ограниченные первые моменты, то это семейство является плотным (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x > 0$, что $M_N([0, x]) \geqslant 1 - \varepsilon$ для всех N).

6. (Упражнение 6.2) Докажите, что матрица 3 из примера 6.4 является тотально положительной.

7. (Упражнение 6.8) Докажите непосредственно, что мера на $\mathbb{Z}$

$$M(n) = \begin{cases} \gamma^n / n!, & n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

с параметром $\gamma > 0$ является тотально положительной.

8. Докажите, что если A — конечномерная эрмитова матрица, у которой все главные миноры неотрицательны, то $A \geqslant 0$.

В задачах 9–11 предполагается, что H — счетномерное комплексное гильбертово пространство, $\mathcal{L}(H)$ — алгебра ограниченных операторов в H, $B_1 \subset \mathcal{L}(H)$ — подмножество операторов с нормой $\leqslant 1$ (единичный операторный шар), $U(H)$ — группа всех унитарных операторов в H.

9. Докажите, что на B_1 слабая операторная топология метризуема, а на всем пространстве $\mathcal{L}(H)$ — нет.

10. Докажите, что $U(H)$ плотно в B_1 в слабой операторной топологии.

11. Докажите, что слабая и ультраслабая топология на $\mathcal{L}(H)$ различны (определение ультраслабой операторной топологии дано в лекции 9).

12. Топология в группе $U(\infty) := \varinjlim U(N)$ задается как топология индуктивного предела. По определению, это слабейшая (грубейшая) топология с тем свойством, что если X — произвольное топологическое пространство, то отображение $U(\infty) \to X$ непрерывно в точности, если его сужение на каждую группу $U(N)$ непрерывно. Докажите, что приведенное определение корректно, т.е. топология существует; объясните, как задать семейство фундаментальных окрестностей данной точки; докажите, что $U(\infty)$ не является локально компактным пространством.