Алгебра 3-?

Напомним что гомологический комплекс Шевалле $C_*(\mathfrak{g}, V)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со значениями в представлении (V, ρ) суть $\bigwedge \mathfrak{g} \otimes V$ с диффенциалом $\delta = D_1 + D_2$,

$$D_1(g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_{n+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} [g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge g_2 \cdots \wedge \hat{g}_i \wedge \cdots \wedge \hat{g}_j \wedge \cdots \wedge g_{n+1})$$

$$D_2 c(g_1 \wedge g_2 \cdots \wedge g_{n+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} \rho(g_i) c(g_1 \wedge g_2 \cdots \wedge \hat{g}_i \cdots \wedge g_{n+1}).$$

Пусть $\tilde{C}$ подкомплекс комплекса C. Гомотопией C на $\tilde{C}$ называется отображение h степени -1 (навстречу дифференциалу) такое что $h(\tilde{C}) \subset \tilde{C}$ и $hd + dh = \mathrm{Imod}\tilde{C}$.

1. Докажите что если существует гомотопия C на $\tilde{C}$ то $H^*(C) = H^*\tilde{C}$

2. Пусть $\mathfrak{a}$ - абелева алгебра Ли а)опознайте ее универсальную обертывающую $U(\mathfrak{a})$ б) Найдите гомологии $\mathfrak{a}$ с коеффициентами в $U(\mathfrak{a})$; для чего исследуйте отображение

$$H(g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_m | h_1 h_2 \cdots h_n) = \sum_{j=1}^{n} h_j g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_m | h_1 h_2 \cdots h_i \cdots h_n.$$

3. Для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ найдите гомологии $\mathfrak{g}$ с коеффициентами в $U(\mathfrak{g})$; для чего воспользуйтесь ПБВ и фильтрацией на комплексе Шевалле полученной комбинированием ПБВ-фильтрации и глупой фильтрации на комплексе и предыдущей задачей.

Для пары $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$-представления V индуцированным представлением $\mathrm{Ind}V$ (так же как для групп) называется

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} V.$$

4. Найдите гомологии индуцированного представления.