Нормирования и p-адические числа.

Задача 1°. [1] Найдите p-адическое разложение для
a) $\frac{2}{3}$ в $\mathbb{Q}_2$; b) $-\frac{1}{6}$ в $\mathbb{Q}_7$; c) $\frac{1}{10}$ в $\mathbb{Q}_{11}$; d) $\frac{1}{120}$ в $\mathbb{Q}_5$.
e) Докажите, что p-адическое разложение числа $a \in \mathbb{Q}_p$ периодично начиная с некоторого места тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{Q}$.

Задача 2°. a) Пусть $c \in \mathbb{Z}, p \nmid c$. Покажите, что в $\mathbb{Q}_p$ последовательность c^{p^n} сходится и для ее предела γ имеет место: $\gamma \equiv c \mod p$ и $\gamma^{p-1} = 1$. Выведите отсюда, что $t^{p-1} - 1$ целиком раскладывается на линейные множители в $\mathbb{Q}_p$.
b) Докажите, что при нечетном p корни из единицы, содержащиеся в $\mathbb{Q}_p$, — в точности корни степени $p-1$, а корни из единицы, лежащие в $\mathbb{Q}_2$, — это ± 1.
Подсказка: рассмотрите гомоморфизм $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times$.

Задача 3. Покажите, что над $\mathbb{Q}_p$ существуют расширения произвольной степени.

Задача 4 (мультипликативная группа поля $\mathbb{Q}_p$). Положим $U = \mathbb{Z}_p^\times, U_n = 1 + p^n\mathbb{Z}_p$.
a) Покажите, что $U = \varprojlim U_n$ и $U_n/U_{n+1} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
b) Докажите, что имеет место разложение $U = V \times U_1$, где $V = \{x \in U \mid x^{p-1} = 1\}$ — подгруппа корней степени $p-1$ из единицы в $\mathbb{Q}_p$.
c) Пусть $x \in U_n - U_{n+1}$ и $n \geq 1$, если $p \neq 2$, и $n \geq 2$, если $p = 2$. Покажите, что $x^p \in U_{n+1} - U_{n+2}$.
d) Убедитесь, что при $p \neq 2$ группа U_1/U_n циклическая и выведите отсюда, что $U_1 \cong \mathbb{Z}_p$.
e) Докажите, что $U_1 \cong \{\pm 1\} \times U_2 \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}_2$ при $p = 2$.
f) Получите, что $\mathbb{Q}_p^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ при $p \neq 2$ и $\mathbb{Q}_2^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 5. a) Убедитесь, что поля $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_q$, не изоморфны, если $p \neq q$, а также, что $\mathbb{Q}_p$ не изоморфно $\mathbb{R}$.
b) Докажите, что поле $\mathbb{Q}_p$ не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного.
Подсказка: покажите, что все автоморфизмы автоматические непрерывны.

Задача 6. a°) Пусть $F(x_1, \ldots, x_m) = a_1x_1^m + \cdots + a_mx^m \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_m], r = v_p(m), s = \max(v_p(a_1), \ldots, v_p(a_m)), N = 2(r+s)+1$. Докажите, что уравнение $F(x_1, \ldots, x_m) = 0$ имеет ненулевое решение в $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда сравнение $F \equiv 0 \mod p^N$ имеет нетривиальное решение.
b^*) Докажите, что уравнение $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ имеет нетривиальное решение в $\mathbb{Z}_p$ при любом p. (Используя разложение на простые в кубических расширениях $\mathbb{Q}$, мы в дальнейшем убедимся, что это уравнение не имеет нетривиальных рациональных решений).
Подсказка: убедитесь сначала, что сравнение $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 \equiv 0 \mod p$ *имеет решение при всех* p.

Задача 7. Для многочлена $F(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_m]$ обозначим через c_n число решений сравнения $F(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 \mod p^n$ и рассмотрим *ряд Пуанкаре* $\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$.
a) Вычислите ряд Пуанкаре для $F(x) = a_1x_1^2 + \cdots + a_mx_m^2$, где $a_k \in \mathbb{Z}_p^\times$. Убедитесь, что $\phi(t)$ — рациональная функция.
b) Найдите ряд Пуанкаре для многочлена $F(x_1, \ldots, x_m)$, обладающего свойством: для всякого решения сравнения $F(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 \mod p$ при некотором $i = 1, \ldots, m$ имеем $\frac{\partial F}{\partial x_i} \not\equiv 0 \mod p$.
c) Посчитайте ряд Пуанкаре для многочлена $F(x, y) = x^2 - y^3$.

[1] Задачи со значком ° очень рекомендуется научиться решать.

Имеется теорема Игусы о том, что ряд Пуанкаре всегда рационален. Известны различные ее доказательства, основывающиеся на разрешении особенностей алгебраических многообразий, p-адическом интегрировании, теории моделей.

Задача 8 (ряды в $\mathbb{Q}_p$). a°) Покажите, что степенной ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k, a_k, x \in \mathbb{Q}_p$ сходится при $|x|_p < r$ и расходится при $|x|_p > r$, где $r = \limsup |a_n|_p^{1/n}$. Что может происходить со сходимостью на границе $|x|_p = r$?

b°) Убедитесь, что ряд $\log(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ сходится при $|x|_p < 1$ и расходится при $|x|_p \geq 1$.

c) Найдите радиус сходимости ряда $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Сходится ли этот ряд на границе круга сходимости?

d) Проверьте, что в $\mathbb{Q}_p$ имеют место равенства:

$$\log((1+x)(1+y)) = \log(1+x) + \log(1+y),\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),$$
$$\exp(\log(1+x)) = 1+x,\ \log(\exp(x)) = x.$$

Выведите отсюда, что exp и log — взаимно обратные изоморфизмы некоторой окрестности 0 в аддитивной группе $\mathbb{Z}_p$ и некоторой окрестности 1 в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_p^\times$.

e^*) Исследуйте сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}x^k$.

Задача 9 (непрерывные функции на $\mathbb{Z}_p$). Наша цель — дать следующую характеризацию непрерывных функций $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ (теорема Малера): $f(x)$ — непрерывна тогда и только тогда, когда существует последовательность $b_i \in \mathbb{Q}_p, b_i \to 0$ такая, что $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}$ для всех $x \in \mathbb{Z}_p$ (здесь $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$).

a) Пусть $b_i \in \mathbb{Q}_p$ — последовательность p-адических чисел, $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = 0$. Убедитесь, что функция $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}$ является непрерывной функцией на $\mathbb{Z}_p$.

b) Докажите, что для любой последовательности $a_i \in \mathbb{Q}_p$ найдется единственная последовательность b_n такая, что $a_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} b_i$ (на самом деле слагаемые с $i > n$ равны 0).

c) Положим $a(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $b(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i t^i$. Покажите, что $b(t) = \frac{1}{1+t} a\left(\frac{t}{t+1}\right)$.

d) Предположим, что функция $n \mapsto a_n$ продолжается до непрерывной функции на $\mathbb{Z}_p$. Пусть $v_p(a_n - a_{n'}) \geq k$, если $v_p(n-n') \geq r$, и $s \in \mathbb{N}$ такое, что $p^s a_n \in \mathbb{Z}_p$ при всех n. Покажите, что $v_p(b_i) \geq k$ при $i > N(k) = (s+k+1)p^r$. Получите отсюда теорему Малера.

Подсказка: представьте $a(t)$ в виде $P(t)(1-t^{p^r})^{-1} + p^k\alpha(t), P(t) = \sum\limits_{n=0}^{p^r-1} a_n t^n, \alpha(t) \in \mathbb{Z}_p[[t]]$, воспользуйтесь дальше тем, что $(1+t)^{p^r} - t^{p^r} \equiv 1 \mod p$.

Задача 10. a°) Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}_2$ гомеоморфно Канторову множеству (которое получается выкидыванием из отрезка $[0,1]$ всех точек, в троичном разложении которых встречается цифра 1).

b) Докажите, что все кольца $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфны.

Задача 11°. Покажите, что для всех $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ имеет место равенство $|x| \cdot \prod\limits_p |x|_p = 1$, где произведение берется по всем простым числам p (эта формула имеет обобщение на случай произвольных конечных расширений $\mathbb{Q}$).

Задача 12. a) Докажите, что нормирование $\| \ \|$ поля F неархимедово тогда и только тогда, когда $\|n\| \leq 1$ для любого натурального числа n.

b) Покажите, что всякое нормирование поля характеристики p неархимедово.

Задача 13. Докажите, что два нормирования $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ поля F задают одну и ту же топологию (сходимость) на F в том и только в том случае, когда существует положительное вещественное α, для которого $\| \ \|_1 = \| \ \|_2^{\alpha}$.

Задача 14°. a) Пусть k — поле, $E = k(t)$. Для $u = t^m \frac{f(t)}{g(t)} \in E, f(0) \neq 0, g(0) \neq 0$ определим $\|u\| = \rho^m$, где $\rho \in \mathbb{R}, 0 < \rho < 1$ — некоторое фиксированное вещественное число. Покажите, что $\| \ \|$ — норма на E и пополнение E по этой норме изморфно полю рядов Лорана $k((t))$, т. е. состоит из элементов вида $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k t^k, a_k \in k, m \in \mathbb{Z}$.

b) Опишите все нормирования поля $\mathbb{F}_q(t)$.

Подсказка: кроме нормирования, введенного в пункте a), имеется нормирование, соотвествующее „точке на бесконечности“ в $\mathbb{P}^1$*: для* $u = \frac{f(t)}{g(t)} \in \mathbb{F}_q(t)$ *это* $\rho^{\deg g - \deg f}$.

Задача 15 (Теорема Гельфанда—Торнхейма). a) Пусть F — нормированное поле, содержащее $\mathbb{C}$, при этом нормирование $| \ |$ на F продолжает обычное нормирование на $\mathbb{C}$. Пусть $x_0 \in F \setminus \mathbb{C}$. Положим $f(z) = (x_0 - z)^{-1} : \mathbb{C} \to F$. Убедитесь, что функция $z \mapsto |f(z)|$ непрерывна, ограничена и достигает наибольшего значения M на некотором замкнутом множестве $D \subset \mathbb{C}$.

b) В обозначениях предыдущего пункта предположим, что $0 \in D$. Пусть ω — примитивный корень степени n из $1, r \in \mathbb{R}, |r/x_0| < 1$. Положим $S(n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_0 - \omega^k r}$. Убедитесь, что $\lim\limits_{n \to \infty} |S(n)| = |1/x_0| = M$.

c) Докажите, что для любого комлексного числа λ такого, что $|\lambda| = 1$, имеет место $\left| \frac{1}{x_0 - \lambda r} \right| = M$. Выведите отсюда, что $F = \mathbb{C}$.

Подсказка: рассмотрите маленький интервал, содержащий λ*, и корни из* 1*, лежащие в нем.*

d) Покажите, что любое поле F с *архимедовым* нормированием изоморфно подполю $\mathbb{C}$ так, что при изоморфизме нормирование на F переходит в стандартное нормирование на $\mathbb{C}$.

Задача 16*. Пусть K — поле с неархимедовым нормированием $\| \ \|$. Положим $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid \|x\| \leq 1\}, \mathfrak{m}_K = \{x \in K \mid \|x\| < 1\}, k = \mathcal{O}_K / \mathfrak{m}_K$. Докажите, что K локально компактно (т. е. существует компактная окрестность 0) тогда и только тогда, когда K — полно, нормирование $\| \ \|$ дискретно (т.е. образ K в $\mathbb{R}$ при этом нормировании — дискретная погруппа $\mathbb{Z}$), а поле вычетов k конечно.