Задачи

1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ большого числа измерений. Вычислите объёмы V_n и U_n единичного куба и единичного шара в $\mathbb{R}^n$ соответственно. Какова асимптотика U_n/V_n ?

2. Как смоделировать равномерно распределённую случайную точку на сфере S^{n-1} ?

3. Нарисуйте проекцию на выбранную прямую равномерного распределения на сфере S^{n-1}. То же самое для проекции на двумерную плоскость.

4. Докажите, что единичный шар в бесконечномерном гильбертовом пространстве содержит бесконечное число трансляций некоторого шара радиуса r. Каково максимально возможное значение r ? Докажите, что для любой трансляционно инвариантной меры в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mu(B_1) = \infty$.

5. Компактен ли единичный шар B_1 в гильбертовом пространстве?

6. Докажите тождество параллелограмма для линейного пространства H со скалярным произведением:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1}$$

7. а) Докажите, что скалярное произведение можно выразить через норму при помощи поляризационного тождества

$$\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{4}\Big((\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\|)\Big). \tag{2}$$

б) Скалярное произведение также может быть представлено в виде:

$$\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|x+\alpha^n y\|^2 \alpha^n, \qquad \alpha^N = 1, \quad N > 2 \tag{3}$$

$$\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|x+e^{i\theta}y\|^2\, e^{i\theta}\, d\theta. \tag{4}$$

Какие функции ρ и меры μ на $S^1 = \{z\colon\ |z| = 1\}$ приводят к аналогичным соотношениям вида

$$\langle x,\, y\rangle = \int_{S^1} \|x+\rho(z)y\|^2\, \rho(z)\, d\mu(z)\ ? \tag{5}$$

8. Докажите, что норма связана со скалярным произведением тогда и только тогда, когда норма удовлетворяет тождеству параллелограмма.

9. Придумайте аналог конструкции задачи 7 для вещественного евклидова пространства. *Указание*: Перейдите к случаю $\mathbb{R}^2$.

10. Рассмотрим вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$. Докажите, что норма $Q(x)$ связана со скалярным произведением тогда и только тогда, когда $Q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$, где $x = (x_1, x_2)$. Как проинтерпретировать равенство параллелограмма в терминах матрицы квадратичной формы? Как решается аналогичная задача на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$?

11. Пусть H — гильбертово пространство, и M — линейное подпространство H. Докажите, что $\bar{M} = (M^\perp)^\perp$, где $\bar{M}$ — замыкание M.

12. Пусть N — конечномерное подпространство в гильбертовом пространстве H, а M — замкнутое линейное подпространство H. Докажите, что $M+N$ замкнуто.

13. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Постройте простую непрерывную кривую, у которой любые две непересекающиеся хорды ортогональны.

14. Примените процесс ортогонализации к последовательности $1,\ x,\ x^2, \dots$ в гильбертовых пространствах:
а) $L^2([-1,1],\lambda)$; б) $L^2([-1,1],(1-x^2)^{-1/2}\lambda)$;
в) $L^2([0,\infty),e^{-x}\lambda)$; г) $L^2((-\infty,+\infty),e^{-x^2/2}\lambda)$;

15. Примените процесс ортогонализации к последовательности z^k в гильбертовых пространстве $L^2(S^1,\mu)$, где $\mu=\sum_{w=k/2^n}4^{-n}\boldsymbol{\delta}_w$ и пара (k,n) такова, что k и 2^n взаимно просты.

16. Существует ли функция $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$, равная нулю вне $[-1,1]$, такая, что $f(2^k x-a)\perp f(x)$ при всех $k\in\mathbb{N},\ k\geq 2,\ a\in\mathbb{Z}$? Каков ответ в случае, когда мы заменяем 2^k на произвольный положительный множитель $m\neq 1$?

17. Вычислите ортогональное дополнение в $L^2(0,1)$ к следующим множествам:
а) $\{P(x)\}$; б) $\{P(x^2)\}$; $\{xP(x)\}$, где $P(x)$ — полином.

18. а) Приведите пример гильбертовых базисов в пространстве $L^2(0,1)$.
б) Существует ли базис, каждая функция в котором кусочно постоянна?

19. "Одометр". Рассмотрим пространство последовательностей

$$X=\{(x_1,x_2,\dots)\colon\ \phi_n(x_{n+1})=x_n\}, \tag{6}$$

где $x_n\in\mathbb{Z}_{2^n}$, и ϕ_n — естественная проекция

$$\phi_n\colon\ \mathbb{Z}_{2^{n+1}}\to\mathbb{Z}_{2^n}\colon\ \xi\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\mapsto\xi\mathbb{Z}_{2^n}. \tag{7}$$

Снабдим X мерой $\mu\{x\colon\ x_n=a\}=2^{-n}$. Найдите базис в пространстве $L^2(X,\mu)$.

20. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f,\,g\rangle=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \tag{8}$$

в пространстве B_0 конечных тригонометрических сумм

$$f=\sum_j e^{i\lambda_j x}. \tag{9}$$

а) Приведите пример гильбертова базиса в пространстве B, которое является пополнением B_0.
б) Докажите, что B содержит пространство почти периодических непрерывных функций, но не совпадает с ним.

21. Пусть F — пространство функций, голоморфных внутри единичного круга

$$D=\{z\in\mathbb{Z}\colon\ |z|<1\} \tag{10}$$

и непрерывных на границе ∂D. Введём на F скалярное произведение

$$\langle f,\,g\rangle=\int_D f(z)\overline{g(z)}\,d\lambda. \tag{11}$$

Является ли F полным? Найдите базис для пополнения пространства F.