Задачи

1. Существует ли гильбертово пространство счётной размерности (как линейное пространство)?

2. Пусть $(e_1, e_2, \ldots)$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, и пусть $(f_1, f_2, \ldots)$ — ортонормированное множество векторов в H, такое, что $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j - e_j\|^2 < \infty$. Докажите, что $\overline{\mathrm{Span}}\{f_j\} = H$. Сохраняется ли это утверждение, если вместо сходимости ряда подтребовать условие $\|f_j - e_j\| \to 0$? Сохраняется ли утверждение, если вместо свойства ортонормированности потребовать от последовательности (f_j) свойство $\|f_j\| \le \mathrm{const}$?

3. Пусть α — комплексное число, $0 < |\alpha| < 1$. Найдите линейную оболочку элементов x_{α^k} в пространстве l^2, где $x_\beta = (1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots)$.

4. Пусть λ — мера Лебега на $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$. Обозначим $\mathbf{A}^2(D)$ пространство квадратично интегрируемых относительно меры λ аналитических в D функций со скалярным произведением

$$\langle f,\, g\rangle = \int_D f(z)\overline{g(z)}\, d\lambda. \tag{1}$$

Докажите, что семейство функций

$$e_n(z) = \sqrt{\pi^{-1}(n+1)}\, z^n \tag{2}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbf{A}^2(D)$.

5. Обозначим как L_a подпространство в $\mathbf{A}^2(D)$ функций, обращающихся в ноль в точке a. Является ли L_a замкнутым?

6. Пусть F — вещественное гильбертово пространство. Докажите, что существует гильбертово пространство H над $\mathbb{C}$ (*комплексификация* F) и линейное отображение $U\colon\ F \to H$, такое, что $\langle Uf,\, Ug\rangle = \langle f,\, g\rangle$ и $\forall x \in H$ существуют единственные $f_1, f_2 \in F$ со свойством $x = Uf_1 + iUf_2$.

7. Пусть Y — линейное подпространство гильбертова пространства H, тогда Y всюду плотно в H тогда и только тогда, когда $Y^\perp = \{0\}$.

8. Пусть $\overline{\mathrm{Span}}(A)$ — замкнутая линейная оболочка множества A, т.е. пересечение всех замкнутых линейных подпространств, содержащих A. а) Докажите, что $\overline{\mathrm{Span}}(A)$ совпадает с замыканием множества всех конечных линейных комбинаций $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$, где $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $f_j \in A$.
б) Докажите, что $\overline{\mathrm{Span}}(A) = (A^\perp)^\perp$.

9. Пусть $0 < t < 1$. Определим линейный функционал L на $\mathbf{A}^2(D)$ формулой $L(f) = f(t)$. Докажите, что L — ограниченный линейный функционал, вычислите $\|L\|$ и найдите вектор h_0, такой, что $L(f) = \langle f,\, h_0\rangle$.

10. Приведите пример неограниченного линейного функционала, ограниченного на базисе. Можно ли построить линейный функционал L, такой, что $L(e_i) = 0$ для каждого вектора базиса?

11. Пусть H и K — гильбертовы пространства. Мы говорим, что множество линейных отображений $A\colon\ H \to K$ слабо ограничено, если найдутся общие для всех отображений константы $m(f, g)$, такие, что $|\langle Af,\, g\rangle| \le m(f, g)$. Докажите, что любое слабо ограниченное множество ограниченных линейных отображений ограничено.

12. Пусть линейное отображение гильбертовых пространств $A\colon\ H \to K$ инъективно. Докажите, что, если образ пространства H плотен в K, то $\dim H = \dim K$.