Задачи

1. Докажите, что следующие утверждения относительно линейного оператора A в гильбертовом пространстве эквивалентны:

a) A непрерывен;
b) A непрерывен в нуле;
c) A ограничен, а именно, существует константа c, такая, что $\|Ax\| \leq c\|x\|$.

2. Пусть (e_n) — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве. Докажите, что линейный оператор A ограничен, если $\sum_n \|Ae_n\| < \infty$.

3. Докажите, что пространство $B(H,K)$ является полным относительно метрики $d(A,B) = \|A - B\|$.

4. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $k\colon X \times X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. Предположим, что существуют положительные константы c_1 и c_2, такие, что почти всюду

$$\int_X |k(x,y)|\, d\mu(y) \leq c_1, \tag{1}$$

$$\int_X |k(x,y)|\, d\mu(x) \leq c_2. \tag{2}$$

Определим оператор K на пространстве $L^2(X,\mu)$ формулой

$$Kf(x) = \int_X k(x,y) f(y)\, d\mu(y). \tag{3}$$

Проверьте, что K — ограниченный оператор и $\|K\| \leq \sqrt{c_1 c_2}$.

5. Оператор Вольтерá на $L^2(0,1)$ определяется соотношением

$$Vf(x) = \int_0^x f(y)\, dy. \tag{4}$$

Оператор V отвечает ядру из предыдущей задачи, равному индикатору множества $\{(x,y)\colon\ y < x\}$. Что можно сказать о последовательности норм итераций $\|V^n\|$?

6. Пусть k_1 и k_2 — два ядра, удовлетворяющих условиям задачи 4. Определим новое ядро $k(x,y)$ формулой

$$k(x,y) = \int_X k_1(x,z) k_2(z,y)\, d\mu(z). \tag{5}$$

Проверьте, что $k(x,y)$ также удовлетворяет условиям задачи 4.

7. Каждый оператор A в некотором зависящем от оператора ортонормированном базисе может быть записан матрицей с "конечными" столбцами (в каждом столбце содержится лишь конечное число ненулевых элементов).

8. Пусть $a_{i,j} \geq 0$, $p_i > 0$, $i,j = 0,1,2,\ldots$, и пусть β и γ — положительные числа, такие, что

$$\sum_i a_{ij} p_i \leq \beta p_j, \tag{6}$$

$$\sum_j a_{ij} p_j \leq \gamma p_i. \tag{7}$$

Тогда существует оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве, обладающий матрицей (a_{ij}) и имеющий норму $\|A\| \leq \sqrt{\beta\gamma}$.

9. Существует оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве, обладающий матрицей $(a_{ij}) = |1 + i + j|^{-1}$, $i,j = 0,1,2,\ldots$, и его норма не превосходит π.

10. Вычислите операторную норму для оператора в $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением, заданного матрицей $(a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$.

11. Пусть ν — мера на пространстве $X \times X$, где (X, μ) — измеримое пространство, $X = [0,1]$, μ — мера Лебега, имеющая стандартные проекции на координатные оси: $\nu(A \times X) = \mu(A)$ и $\nu(X \times B) = \mu(B)$. Докажите, что существует ограниченный оператор J на пространстве $L^2(X, \mu)$, удовлетворяющий соотношению

$$\langle Jf,\, g\rangle = \int_{X\times X} f(x)g(y)\,d\nu. \tag{8}$$

12. Вычислите операторы из задачи 11 для следующих мер: a) $\nu = \mu \times \mu$; b) Δ — мера, сосредоточенная на диагонали; c) мера, равномерно распределённая на графике $\{y = 2x\}$; c) мера, равномерно распределённая на множестве $\{x = 2y\}$.