Задачи

1. Оператор P называется *проектором*, если $P^2 = P$. Если $P^2 = P$ и $P^* = P$, то P называется *ортогональным проектором.* Докажите, что P — ортогональный проектор тогда и только тогда, когда $P^2 = P$ и $\ker P \perp \mathrm{Ran} P$, причём $\ker P$ — замкнутое подпространство.

2. Оператор A^*, сопряжённый к оператору A определяется соотношением $\langle Ax,\, y\rangle = \langle x,\, A^* y\rangle$. Пусть U — унитарный оператор, т.е. U обратим и $\langle Ux,\, Uy\rangle = \langle x,\, y\rangle$. Докажите, что $Uf = f$ тогда и только тогда, когда $U^* f = f$.

3. Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве. Докажите, что $(\mathrm{Ran} A)^{\perp} = \ker A^*$.

4. *Статистическая эргодическая теорема.* Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H, и пусть P — ортональный проектор на пространство инвариантных функций $\{f\colon\ Uf = f\}$. Тогда для любого элемента $f \in H$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f = Pf. \tag{1}$$

4. Пусть $T\colon\ X \to X$ — обратимое преобразование на вероятностном пространстве $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Можно считать, что $X = [0, 1]$, μ — мера Лебега. *Оператор Купмана* определяется формулой: $U_T f(x) = f(Tx)$. Проверьте, что U_T — унитарный оператор в пространстве $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

5. Оператор U назовём эргодическим, если пространство инвариантных относительно U фугкций $Uf = f$ состоит только из констант. Преобразование T на вероятностном пространстве назвыается эргодическим, если не существует множества A, такого, что $TA = A$ и $0 < \mu(A) < \mu(X)$. Проверьте, что U_T эргодичен для эргодического преобразования T. Верно ли обратное?

6. Докажите эргодичность преобразований:
а) $R_\alpha\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{T}\colon\ x \mapsto x + \alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$;
б) $T_2\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{T}\colon\ x \to 2x$;
в) $T_A\colon\ \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2\colon\ X \to AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. *Эргодическая теорема Биркгофа.* Пусть T — эргодическое преобразование на вероятностном пространстве Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Докажите, что для почти всех $x \in X$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T_U^n f = \int f\, d\mu. \tag{2}$$

8*. Решите упражнение 7 для действий группы $\mathbb{Z}^2$.

9. Определим множество *почти периодических функций* $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (по Бору) как замыкание множества тригонометрических полиномов на $\mathbb{R}$, $P(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k t}$. Докажите, что это определение эквивалентно следующему: Для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество ε-почти периодов τ, где $|f(t) - f(t + \tau)| < \varepsilon$, такое, что длины интервалов на прямой, свободных от ε-почти периодов τ ограничено.

10. Докажите, что если f — почти периодическая функция и $t_n \to \infty$ — некоторая последовательность в $\mathbb{R}$, то из последовательности функций $f(t_n + t)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $C(\mathbb{R})$.

11. Пусть $H(\mathbb{Z}) = \overline{B}(\mathbb{Z})$ и $WAP(\mathbb{Z})$ — пространство слабо почти периодических функций на $\mathbb{Z}$. Докажите, что пространства $B(\mathbb{Z})$, $H(\mathbb{Z})$ и $WAP(\mathbb{Z})$ являются алгебрами относительно естественных произведений.

12. Разберите пример В. Рудина: докажите, что $WAP(\mathbb{Z}) > H(\mathbb{Z})$.