Задачи

1. Постройте множество первой категории на отрезке $[0,1]$ меры 1.

2. Пусть $f_n \in L^1[0,1]$ — последовательность функций, такая, что предел

$$\Lambda\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\,dt$$

существует для всех $\varphi \in C[0,1]$. Докажите, что Λ — ограниченный функционал. Найдите $\|\Lambda\|$.

3. Решите задачу 2 в случае, когда рассматриваются функции $\varphi \in C^\infty[0,1]$. Что можно сказать о последовательности $\int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\,dt$?

4. Покажите, что $L^2[0,1]$ является множеством первой категории в $L^1[0,1]$, а именно, проверьте, что

a) $\{f\colon\ \int |f|^2\,dt \le n\}$ замкнуто, но имееет пустую внутренность в L^1.

b) Пусть $g_n(t) = n$ на $[0,n^{-3}]$ и $g_n(t) = 0$ вне $[0,n^{-3}]$. Тогда $\int fg_n\,dt \to 0$ для любой функции $f \in L^1$.

c) Стандартное вложение L^2 в L^1 непрерывно, но неявлается сюрьекцией.

5. Зададим коэффициенты Фурье $\hat f(n)$ функции f формулой

$$\hat f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$\Lambda_n f = \sum_{k=-n}^{n} \hat f(k).$$

Докажите, что множество $\{f \in L^2(S^1)\colon\ \lim_{n\to\infty}\Lambda_n f \text{ существует}\}$ является всюду плотным и имеет первую категорию в $L^2(S^1)$.

6. Пусть γ_n — последовательность комплексных чисел, такая, что для любой $f \in C(S^1)$ существует $\Lambda f \in C(S^1)$, коэффициенты Фурье которой

$$(\Lambda f)\hat{}(n) = \gamma_n \hat f(n).$$

Докажите, что критерием этого свойства является существование комплексной борелевской меры μ на S^1, такой, что

$$\gamma_n = \int_{S^1} e^{-in\theta}\,d\mu(\theta).$$

7. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства и $B\colon\ X \times Y \to Z$ — непрерывное линейное отображение. Докажите, что существует такое $M < \infty$, что $\|B(x,y)\| \le M\,\|x\|\,\|y\|$.

8. Докажите, что билинейное отображение, непрерывное в точке $(0,0)$, непрерывно.