# Программа экзамена: первый семестр

**1.** Гильбертовы пространства. Тождество параллелограмма. Примеры: $\mathbb{C}^n$, $l^2$, $L^2(X,\mu)$.

**2.** Неравенство Бесселя. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Базис в гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля.

**3.** Функционалы на гильбертовом пространстве. Сопряжённое пространство. Лемма Рисса об общем виде ограниченного функционала на гильбертовом пространстве.

**4.** Сепарабельные гильбертовы пространства: базисы, сопряжённое пространство.

**5.** Унитарный оператор, связанный с динамической системой на пространстве с мерой. Эргодическая теорема Дж. фон Неймана (о сходимойсти эргодических средних в $L^2(X,\mu)$).

**6.** Банаховы пространства. Примеры. Ограниченные линейные функционалы и операторы на гильбертовом пространстве (определения).

**7.** Теорема Банаха–Хана. Теорема о продолжении функционала на банаховом пространстве. Теорема о почти перпендикуляре.

**8.** Теорема Бэра о категории. Принцип равномерной ограниченности семейства функционалов. Теорема о непрерывности билинейной формы.

**9.** Теорема об открытом отображении. Теорема Банаха об обратном операторе.

**10.** Теорема о замкнутом графике.

**11.** Слабая топология. $*$-Слабая топология на пространстве линейных функционалов.

**12.** Банаховы алгебры. Алгебра $C(X)$ непрерывных функций на компакте. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.

*Литература.*


- М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. 1: Функциональный анализ. Москва – "Мир 1977.
- У. Рудин. Функциональный анализ. Москва – "Мир 1975.
- П. Халмош. Гильбертово пространство в задачах. Москва – "Мир 1970.
- А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. Москва – "Наука 1988.
- J. B. Conway. A course in functional analysis. *Graduate texts in mathematics.* New York – "Springer-Verlag 1985.