$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Определение 1. *Отношение эквивалентности* $\sim$ на множестве M.

1) Рефлексивность: $a \sim a$.
2) Симметричность: если $a \sim b$, то $b \sim a$.
3) Транзитивность: если $a \sim b$, $b \sim c$, то $a \sim c$.

Предложение 1 *Отношение эквивалентности разбивает M в объединение классов эквивалентности, так что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу эквивалентности.*

Определение 2. Будем говорить, что операция $a \star b$ *определена корректно* на классах эквивалентности, если для $a \sim a'$, $b \sim b'$ выполнено $a \star b \sim a' \star b'$.

Определение 3. *Целостное кольцо (integral domain)* — коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, то есть таких $a, b \neq 0$, что $a \cdot b = 0$.
Определение 4. *Поле частных* $F(K)$ целостного кольца K — множество классов эквивалентности пар (a, b), $a, b \in K$ (записываемых как дроби a/b) по отношению $a/b \sim c/d$ если $a \cdot d = b \cdot c$ (проверьте транзитивность!), с операциями

$$a/b + c/d = (a \cdot d + b \cdot c)/(b \cdot d), \quad (a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d), \quad -(a/b) = (-a)/b, \quad (a/b)^{-1} = b/a.$$

Заметим, что для транзитивности отношения $\sim$ требуется отсутствие делителей нуля.

Упражнение 1 *Поле частных действительно является полем, содержащим K в качестве подкольца $(a, 1)$.*

Для полукольца можно аналогичным образом доопределить вычитание. Но чтобы добиться транзитивности отношения придётся немного усложнить конструкцию.
Определение 5. Пусть X — полукольцо с коммутативным сложением. Определим его *кольцо Гротендика* $K(X)$ как множество классов эквивалентности пар (a, b), $a, b \in K$ (записываемых как разности $a - b$) по отношению $a - b \sim c - d$ если существует $k \in X$, такое что $a + d + k = c + b + k$, с операциями

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d), \qquad (a - b) \cdot (c - d) = (a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c), \qquad -(a - b) = b - a.$$

Упражнение 2 *Кольцо Гротендика действительно является кольцом.*

Заметим, что X отображается в $K(X)$ как элементы вида $(a + a, a)$, но такое отображение не всегда является вложением.

Определение 6. Пусть K — коммутативное кольцо. Норма $|a| : F \to \mathbb{Q}$, — отображение, такое что

1) $|a| \geqslant 0$, $|a| = 0$ только если $a = 0$,
2) $|ab| = |a||b|$,
3) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Определение 7. Последовательность $a_i \in F$, $i \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m, n > N \ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Определение 8. Пополнение $\overline{K}$ — множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей по отношению $a_i \sim b_i$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m, n > N \ |a_m - b_n| < \varepsilon$$

с почленным сложением и умножением.

Упражнение 3 *Докажите, что $\overline{K}$ является коммутативным кольцом, содержащим K в качестве подкольца. Более того, докажите, что если K является полем, то и $\overline{K}$ является полем.*

И так, $\mathbb{Z} = K(\mathbb{N})$, $\mathbb{Q} = F(\mathbb{Z})$, $\mathbb{R} = \overline{Q}$, а $\mathbb{C}$ легко получить из $\mathbb{R}$ добавлением мнимой единицы. Замечательное свойство поля $\mathbb{C}$ — его *алгебраическая замкнутость*

Теорема 1 Основная теорема алгебры. *Всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Определение 9. *Векторное поле* на плоскости $v(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, сопоставляющее каждой точке плоскости вектор (тонкое различие между точками и векторами обсудим позже в контексте линейной алгебры).
Определение 10. *Особая точка (ноль)* векторного поля — точка x, такая что $v(x) = 0$.

Заметим, что каждый ненулевой вектор $v(x)$ можно записать в тригонометрической форме $[r(x), \phi(x)]$, где угол $\phi(x)$ определён с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, — непрерывная плоская замкнутая ($\gamma(1) = \gamma(0)$) кривая, не проходящая через особые точки v. Тогда $\phi(\gamma(t))$ можно считать непрерывной функцией на отрезке $[0, 1]$, причём её значения на концах отличаются на $2\pi k$.
Определение 11. *Вращение* векторного поля $v(x)$ на кривой $\gamma(t)$ определяется как целое число $(\phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0)))/2\pi$.

Следующая лемма верна для границы любой области, но нам она потребуется в достаточно слабой общности.

Лемма 1 *Если вращение векторного поля на окружности $\gamma(t) = (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t))$ отлично от нуля, то внутри неё есть особая точка этого векторного поля.*

Доказательство: Пусть внутри окружности нет особых точек, тогда вращение определено как функция от радиуса r контура при $0 \leqslant r \leqslant R$. Эта функия непрерывна и дискретна (принимает значения $2\pi k$), значит она константа. Но при $r = 0$ её значение равно нулю, что противоречит условию.

Лемма 2 *Если на кривой γ векторные поля u и v образуют острый угол, то их вращения совпадают.*

Доказательство: По условию значения двух функций отличаются меньше, чем на $\pi/2$ по модулю 2π, значит они отличаются меньше, чем на $\pi/2$ и по абсолютному значению, в частности и на концах.

Теперь мы в силах доказать Теорему 1. Умножая на константу, достаточно рассмотреть случай многочлена вида $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Он как отображение $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ задаёт векторное поле, и требуется доказать наличие особой точки. Возьмём $R = |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$. Тогда на окружности $|z| = R$ имеем $|P(z) - z^n| \leqslant |z^n|$, значит, поле $P(z)$ на окружности $|z| = R$ образует острый угол с полем z^n. При этом вращение векторного поля z^n равно n, откуда по Лемме 2 вращение $P(z)$ отлично от нуля, и по Лемме 1 у него есть особая точка.