Модули в линейной алгебре

На предыдущей лекции была доказана следующая теорема.

Теорема 1 *(i) Всякий конечнопорождённый модуль над евклидовым кольцом K изоморфен прямой сумме модулей вида K и K/p^iK, где $i \in \mathbb{N}$, $p \in K$ — простой необратимый элемент.*

(ii) Такое разложение единственно.

В этот раз поговорим о приложениях и границах применимости этой теоремы.

Упражнение 1 *Обобщите доказательство Теоремы 1 для колец главных идеалов.*

1) Пусть $K = \mathbb{Z}$. Тогда из Теоремы 1 получается классификация конечнопорождённых абелевых групп в виде декартовых произведений $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, где $i \in \mathbb{N}$, и $p \in \mathbb{N}$ — простое число.

Пример группы $\mathbb{Q}$ по сложению не укладывается в эту схему — $\mathbb{Q}$ не конечнопорождено над $\mathbb{Z}$, и при этом между любыми двумя элементами имеется соотношение.

Упражнение 2 *Группа $\mathbb{Q}$ не может быть представлена декартовым произведением ненулевых групп.*

2) Пусть K — поле, посмотрим, что возможно извлечь из Теоремы 1 в рамках линейной алгебры.

Определение 1. *Базис* векторного пространства — это

i) минимальный (по вложению) набор образующих;

ii) максимальный (по вложению) набор элементов без соотношений;

iii) набор образующих без соотношений.

Упражнение 3 *Докажите, что эти определеня эквивалентны.*

Часть (iii) Определения 1 говорит о том, что базис конечномерного пространства — установленный изоморфизм со свободным модулем F^n.

Следствие 1 *Во всяком конечномерном векторном простанстве существует базис.*

Докажем существование базиса для счётнопорождённого пространства V. Пусть m_i, $i \in \mathbb{N}$, — образующие V. Рассмотрим множество $J \subset \mathbb{N}$, составленное такими i, что m_i не выражаются через m_j при $j < i$. Тогда легко проверить (используя часть (i) или (iii) Определения 1), что множество m_i для $i \in J$ является базисом V. В совсем общем случае, когда не удаётся найти счётный набор образующих, существование базиса доказывается с использованием Леммы Цорна.

Пример. Счётномерные векторные пространства позволяют привести контрпример для утверждения о единственности разложения в неевклидовом случае.

Пусть V — бесконечномерное векторное пространство, например $F[x]$ над полем F. Тогда $V \cong V \oplus V$, где изоморфизм может быть установлен разложением пространства многочленов в сумму пространств чётных многчленов $F[x^2]$ и нечётных многочленов $xF[x^2]$.

Для любого векторного пространства U абелева группа $\mathrm{Hom}_F(V, U)$ является левым модулем над кольцом $\mathrm{Hom}_F(V, V)$ с действием, определённым композицией отображений. При этом если $U \cong U'$, то $\mathrm{Hom}_F(V, U) \cong \mathrm{Hom}_F(V, U')$ как модули. Значит,

$$\mathrm{Hom}_F(V, V) \cong \mathrm{Hom}_F(V, V \oplus V) \cong \mathrm{Hom}_F(V, V) \oplus \mathrm{Hom}_F(V, V) = \mathrm{Hom}_F(V, V)^2.$$

Заметим, что отображение $F^m \to F^n$ однозначно задаётся матрицей $m \times n$, столбцы которой — образы образующих. Приведение матрицы к нормальной форме доказывает следующее утверждение.

Следствие 2 *Пусть V и W — конечномерные векторные пространства. Линейное отображение $f : V \to W$ определяется с точностью до изоморфизмов $V \to V$ и $W \to W$ его* рангом

$$\mathrm{rk}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f).$$

3) Пусть теперь $K = F[x]$. Тогда K-модуль — векторное пространство V с линейным отображением $\psi : V \to V$. Такие отображения называются *операторами* на пространстве V. Отображение $F[x]$-модулей $(V, \psi) \to (V', \psi')$ однозначно определяется отображением $\Phi : V \to V'$, таким что $\psi'\Phi = \Phi\psi$. В частности, изоморфизм модулей отождествляет не только векторные пространства, но и соответствующие операторы.

Применим к таким модулям Теорему 1. В случае конечномерного векторного пространства слагаемые вида $F[x]$ исключены, остаются слагаемые вида $F[x]/P^k F[x]$, где P неразложим над F.

Для начала пусть F алгебраически замкнуто (например, $F = \mathbb{C}$). Тогда неприводимые многочлены имеют степень 1, и слагаемые модуля имеют вид $F[x]/(x-\lambda)^n F[x]$. Они соответствуют n-мерному векторному пространству со следующим оператором. Выберем базис в этом пространстве так: $(x-\lambda)^{n-1}, (x-\lambda)^{n-2}, \dots, (x-\lambda), 1$. В нём действие x записывается *жордановой клеткой*: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Следствие 3 *Каждый оператор в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем может быть записан в некотором базисе* Жордановой Нормальной Формой*: набором жордановых клеток вдоль главной диагонали, причём такая запись единственна с точностью до перестановки клеток.*

Теперь пусть F произвольно. Приведём матрицу к *нормальной форме Фробениуса.* Пусть $P = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$. Тогда модуль K/PK задаётся n-мерным векторным пространством со следующим оператором. В базисе $1, x, \dots, x^{n-1}$ ему соответствует матрица $n \times n$ вида $M(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Следствие 4 *Каждый оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем может быть записан в некотором базисе* Нормальной Формой Фробениуса*: набором клеток $M(P_i)$ вдоль главной диагонали, где P_i — степени неприводимых многочленов, причём такая запись единственна с точностью до перестановки клеток.*

4) Пусть $K = F[x, y]$, в этом случае модуль задаётся векторным пространством и парой коммутирующих операторов на нём. Здесь существует пример неразложимого модуля с двумя образующими, предлагается построить его самостоятельно (см. листок 7, задача 8).