Билинейные симметрические формы

Мы продолжаем классифицировать симметрические билинейные формы на конечномерных векторных пространствах с точностью до изометрии.

Определение 1. Пусть V — векторное пространство над полем F. Определим *двойственное пространство* V^*, как векторное пространство, составленное *функционалами* на V — линейными отображениями из V в F.

Фактически, билинейная форма — это линейное отображение из V в двойственное пространство V^*, переводящее v в функционал $u \to (u, v)$. А если выбрать базис в V и двойственный базис в V^*, то матрица этого отображения будет в точности матрицей Грама формы.

Определение 2. Пусть $f : U \to V$ — линейное отображение. Определим *двойственное отображение* $F^* : V^* \to U^*$, переводящее функционал $\phi : V \to F$ в функционал $\phi \circ f : U \to F$.

Упражнение 1 *Пусть V конечномерно. Отождествим V^{**} с V с помощью естественного отображения. Тогда двойственное отображение к описанному выше переводит v в функционал $u \to (v, u)$.*

Напомним, что билинейная форма на V называется симметрической, если $(u, v) = (v, u)$ для всех u, $v \in V$. Фактически, это условие самодвойственности отображения $V \to V^*$.

Также напомним, что ортогональная прямая сумма пространств V_1 и V_2 с билинейными формами — пространство $V_1 \oplus V_2$ с билинейной формой, заданной формулой $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$, u_1, $v_1 \in V_1$, u_2, $v_2 \in V_2$.

Определение 3. Подпространства L_1, L_2 называются *ортогональными*, если для всех $u \in L_1$, $v \in L_2$ выполнено $(u, v) = 0$.

Если L_1 и L_2 не пересекаются, то их линейная оболочка изометрична ортогональной прямой сумме L_1 и L_2.

Определение 4. Ядро формы — ядро отображения $V \to V^*$. Форма называется *невырожденной*, если её ядро нулевое.

Предложение 1 *Билинейная форма на конечномерном пространстве невырождена тогда и только тогда, когда отображение $V \to V^*$ обратимо.*

Доказательство: Следует из равенства размерностей V и V^*.

Лемма 1 *Всякое пространство с билинейной симметрической формой изометрично ортогональной прямой сумме ядра формы и пространства с невырожденной формой.*

Доказательство: Пусть V_0 — ядро формы. Тогда, дополняя базис в V_0 до базиса в V, получим $V \cong V_0 \oplus V'$. При этом ядро формы на V' нулевое, и элементы V_0 ортогональны элементам V'.

Лемма 2 *Пусть V — пространство с невырожденной билинейной симметрической формой, $L \subset V$ — подпространство, ограничение формы на которое невырождено. Тогда V изометрично ортогональной прямой сумме L и $L^\perp$, где $L^\perp$ — подпространство векторов, ортогональных L.*

Доказательство: Отобразим ортогональную прямую сумму $L \oplus L^\perp$ в V, переводя пару векторов в их сумму. Докажем, что это отображение — изоморфизм. Во-первых, его ядро равно пересечению L и $L^\perp$, что совпадает с ядром формы на L, значит, наше отображение является вложением.

Чтобы доказать, что отображение является и наложением, представим каждый вектор в виде суммы элементов L и $L^\perp$. Пусть $v \in V$. Тогда $(v, *)$ можно рассматривать и как функционал на L. Заметим, что в силу невырожденности ограничения формы всякий фунционал на L имеет вид $(u, *)$ для $u \in L$. Тогда $v - u \in L^\perp$, что нам и требовалось.

Определение 5. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным*, если для всех u, $v \in U$ выполнено $(u, v) = 0$.

Определение 6. Пространство называется *гиперболическим*, если оно изометрично $U \oplus U^*$ с формой $((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) = \phi_2(v_1) + \phi_1(v_2)$.

Матрица Грама такой формы приводится к блочному виду $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

Лемма 3 *Пусть V — конечномерное пространство с невырожденной билинейной симметрической формой, $L \subset V$ — изотропное подпространство. Тогда найдётся изотропное подпространство $L' \subset V$, такое что подпространство $L + L'$ (линейная оболочка L и L') гиперболическое.*

Доказательство: Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис L. Так как отображение $V \to V^*$ — изоморфизм, найдутся $f_1, \ldots, f_m \in V'$, такие что $(f_i, e_j) = \delta_{ij}$ (где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и ноль иначе). Пусть $(f_i, f_j) = b_{ij}$. Рассмотрим новые базисные элементы $f'_i = f_i - \frac{1}{2}\sum b_{ij}e_j$. Тогда по-прежнему $(f'_i, e_j) = \delta_{ij}$, но теперь $(f'_i, f'_j) = 0$ для всех i, j. Теперь в качестве L' возьмём линейную оболочку $f'_1, \ldots, f'_n$.

Определение 7. Подпространство $W \subset V$ называется *анизотропным*, если оно не содержит ненулевых изотропных подпространств (это равносильно $(v, v) \neq 0$ для всех $v \in W$).

Теорема 1 (Разложение Витта) *Предположим* $\mathrm{char} F \neq 2$. *Пусть векторное пространство V над F наделено симметрической билинейной формой. Тогда V разлагается в ортогональную прямую сумму подпространств V_0, V_1 и V_2, где V_0 — ядро формы, V_1 гиперболическое, а V_2 анизотропно.*

Доказательство: Выделим ядро ортогональным прямым слагаемым, $V = V_0 \oplus V'$. Пусть $U \subset V'$ — максимальное (по вложению) изотропное подпространство. Тогда по Лемме 3 найдётя подпростанство U', такое что $U + U'$ — гиперболическое подпространство. Поскольку форма на $U + U'$ невырождена, разложим V' в ортогональную прямую сумму $V_1 = U + U'$ и $V_2 = (U + U')^{\perp}$.

Заметим, что V_2 анизотропно, иначе обозначим за v изотропный вектор в V_2, и заметим, что подпространство, порождённое U и v, изотропно, что противоречит максимальности U.

Теорема 2 (Теорема Витта) *Пусть V — векторное пространство с невырожденной билинейной симметрической формой. Также пусть L_1, $L_2 \subset V$ — подпространства, $f : L_1 \to L_2$ — изометрия. Тогда существует изометрия $\tilde{f} : V \to V$, переводящая L_1 в L_2.*

Лемма 4 *Теорема Витта верна, если ограничение формы на L_1 (и, тем самым, L_2) невырождено.*

Доказательство: Докажем индукцией по размерности L_1.

База $\dim L_1 = 1$ состоит из трёх случаев.

1) $L_1 = L_2$, тогда по Лемме 2 пространство V изометрично ортогональной прямой сумме L_1 и $L_1^{\perp}$. Положим $\tilde{f} = f$ на L_1 и $\tilde{f} = \mathrm{Id}$ на $L_1^{\perp}$, продолжим по линейности на V.

2) $L_1 \neq L_2$, форма на $L_1 + L_2$ невырождена. Пусть $L' = (L_1 + L_2)^{\perp}$, тогда по Лемме 2 пространство V изометрично ортогональной прямой сумме $L_1 + L_2$ и L'. Пусть e_1 — базисный вектор L_1, тогда $e_2 = f(e)$ — базисный вектор L_2, причём $(e_1, e_1) = (e_2, e_2)$. Положим $\tilde{f}(e_1) = e_2$, $\tilde{f}(e_2) = e_1$ и $\tilde{f} = \mathrm{Id}$ на L'.

3) Форма на $L_1 + L_2$ вырождена. Тогда ядро этой формы L_0 одномерно, пусть его базис состоит из e_0. Пусть e_1 составляет базис L_1. Тогда, так как $(e_1, e_1) \neq 0$, а f — изометрия, $f(e_1)$ равно или $e_1 + \lambda e_0$, или $-e_1 + \lambda e_0$, где $\lambda \in F$.

Применим Лемму 3 к пространству $L_1^{\perp}$ и подпространству L_0, пусть e_2 порождает L'_0. Тогда матрица Грама $L = L_1 + L_2 + L'_0$ в базисе e_0, e_2, e_1 имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (e_1, e_1) \end{pmatrix}$, в частности, ограничение формы на L невырождено. Полагая $\tilde{f} = \mathrm{Id}$ на ортогональном дополнении к L, остаётся определить $\tilde{f}$ на L. Для этого положим

$$\tilde{f}(e_0) = e_0, \qquad \tilde{f}(e_1) = f(e_1) = \pm e_1 + \lambda e_0, \qquad \tilde{f}(e_2) = e_2 \mp \frac{\lambda}{(e_1, e_1)} e_1.$$

Шаг. Пусть e — элемент L, такой что $(e, e) \neq 0$. Тогда по доказанному выше существует изометрия $f' : V \to V$, переводящая e в $f(e)$. Будем искать изометрию $\tilde{f}$ в виде gf', полагая $g(f(e)) = f(e)$. Требуется, чтобы g было изометрией и переводило $f(L_1)$ в L_2.

Пусть $V' = f(e)^{\perp} \subset V$. Определим g на V' по предположению индукции как изометрию, переводящую $f(L_1) \cap V'$ в $L_2 \cap V'$. Продолжая по линейности на всё V, получим требуемое отображение.

Теперь докажем теорему в полной общности. Дополним L_1 и L_2 до пространства с невырожденной формой следующим образом: по Лемме 1 представим L_i, $i = 1, 2$, в виде ортогональной прямой суммы ядра L_i^0 и L_i', затем применим Лемму 3 к пространству $L_i'^{\perp}$ и изотропному подпространству L_i^0. Получим в результате изотропные подпространства M_i, причём ограничение формы на $L_i^0 + L_i' + M_i$ имеет матрицу Грама следующего блочного вида: $\begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_i \end{pmatrix}$, где G_i — матрица Грама формы на L_i'. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис L_1^0, за $e^1, \dots, e^n$ обозначим двойственный базис M_i, в котором $(e_i, e^j) = \delta_{ij}$. Так как f — изометрия, f переводит L_1^0 в L_2^0, и $f(e_1), \dots f(e_n)$ — базис L_2^0. Пусть $f^1, \dots f^n$ —двойственный ему базис M_2. Тогда изометрию f можно продолжить с L_1 до $L_1 + M_1$, отображая e^i в f^i.

Следствие 1 *Разложение Витта единственно с точностью до изометрии слагаемых.*

Доказательство: Во-первых, ядро определено однозначно своей размерностью, также как и форма на другом слагаемом разложения Леммы 1 (оно изометрично факторпространству с естественной формой на нём). Значит, утверждение сводится к невырожденной форме.

Во-вторых, гиперболическое пространство также однозначно задаётся с точностью до изометрии своей размерностью. Докажем, что максимальные изотропные подпространства имеют одинаковые размерности. Пусть U_1 и U_2 — максимальные изотропные и $\dim U_1 > \dim U_2$. Тогда рассмотрим произвольное подпространство $U \subset U_1$, такое что $\dim U = \dim U_2$. Тогда U изометрично U_2 и по Теореме Витта эту изометрию можно продолжить до изометрии всего пространства. Но изометрия должна сохранять свойство быть максимальным изотропным, которое присуще U_2, но не U.

Теперь пусть имеются два разложения Витта пространства с невырожденной формой. Видно, что изотропные подпространства в гиперболических слагаемых максимальны. Значит, ограничение формы на гиперболическое подпространство разложения совпадёт, и, тем самым, задаст изометрию соответствующих подпространств. Продолжим эту изометрию на всё пространство и заметим, что она переводит ортогональное дополнение в ортогональное дополнение, то есть задаёт требуемую изометрию анизотропных подпространств.