Экзамен

Задача 1. Пусть P — многочлен с вещественными коэффициентами. Сколько решений может быть у уравнения $P(x) = 0$ над кольцом кватернионов, если

a) $\deg P = 2$; b) $\deg P = 3$; c) $\deg P = n$.

Задача 2. Пусть над полем F нашлись матрицы A и B размера $n \times n$, такие что $AB - BA$ — единичная матрица. Чему может равняться характеристика F?

Задача 3. a) Рассмотрим множество матриц 2×2 над кольцом $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \in \mathbb{N}$. Определим отношение эквивалентности $A \sim A'$, если найдутся обратимые матрицы B и C, такие что $A' = BAC$. Найдите число классов эквивалентности.

b) Рассмотрим множество матриц 2×2 над кольцом $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где $p > 2$ — простое натуральное число. Определим отношение эквивалентности $A \sim A'$, если найдётся обратимая матрица B, такая что $A' = BAB^{-1}$. Найдите число классов эквивалентности.

Задача 4. Рассмотрим поле $\mathbb{Q}(i)$, состоящее из комплексных чисел с рациональными коэффициентами, как модуль над кольцом чисел Гаусса $\mathbb{Z}[i]$.

a) Докажите, что любой конечнопорождённый подмодуль $\mathbb{Q}(i)$ порождён одним элементом $z \in \mathbb{Q}(i)$.

b) При каких z соответствующий подмодуль замкнут относительно умножения в $\mathbb{Q}(i)$?

c) При каких таких z все идеалы получившегося кольца главные?

Задача 5. Пусть W — группа Витта поля $\mathbb{Q}(i)$.

a) Докажите, что множество элементов W счётно (в частности, бесконечно).

b) Докажите, что каждый отличный от нуля элемент W имеет порядок 2.

c) Докажите, что группа однозначно с точностью до изоморфизма задаётся этими двумя свойствами.

Задача 6. Пусть $I_0 \subset \mathbb{C}[x, y]$ — идеал, состоящий из многочленов, обращающихся в ноль в начале координат. Рассмотрим I_0 как модуль над $\mathbb{C}[x, y]$.

a) Задайте I_0 образующими и соотношениями.

b) Задайте двойственный модуль I_0^* образующими и соотношениями.

c) Задайте фактормодуль I_0^{**} по естественному образу I_0 образующими и соотношениями.