Формальные ряды и l-адические числа

Определение 1. Пусть F — поле. *Формальные ряды* $F[[t]]$ — бесконечные суммы вида $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$, где $a_i \in F$, со сложением и умножением аналогичным многочленам.

Задача 1. a) Напишите формулу для коэффициентов суммы и произведения двух рядов.

b) Докажите, что $F[[t]]$ — коммутативное кольцо.

c) Докажите, что ряд обратим в $F[[t]]$ тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$.

Задача 2. Для многочлена $P = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ пусть $\operatorname{ord}(P)$ — минимальное m, такое что $a_m \neq 0$. Определим $\|P\| = 2^{-\operatorname{ord} P}$.

a) Докажите, что это — норма на кольце многочленов.

b^*) Докажите, что пополнение кольца многочленов по этой норме изоморфно $F[[t]]$.

Определение 2. *Формальные ряды Лорана* $F[t^{-1}, t]]$ — бесконечные суммы вида

$$a_{-n}t^{-n} + a_{-n+1}t^{-n+1} + a_{-n+2}t^{-n+2} + \dots, \qquad a_i \in F, \quad n \in \mathbb{Z},$$

с аналогичным умножением.

Задача 3. a) Докажите, что $F[t^{-1}, t]]$ — поле.

b) Докажите, что поле частных $F[[t]]$ изоморфно $F[t^{-1}, t]]$.

Определение 3. Для натурального l определим *l-адические целые числа* $\mathbb{Z}_l$ как бесконечные влево наборы цифр от 0 до $l-1$ со сложением и умножением столбиком. Также определим *l-адические рациональные числа* $\mathbb{Q}_l$ как бесконечные влево числа с плавающей точкой.

Задача 4. Вычислите в $\mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_2$

a) -1,

b) $1/3$,

c) все возможные значения $\sqrt{3}$ с точностью до четвёртого знака.

Задача 5. a) Докажите, что $\mathbb{Z}_l$ и $\mathbb{Q}_l$ — коммутативные кольца.

b) Докажите, что взятие последних k цифр задаёт отображение колец $\mathbb{Z}_l \to \mathbb{Z}/l^k\mathbb{Z}$.

c) Докажите, что $\mathbb{Z}_l$ и $\mathbb{Q}_l$ — целостные кольца тогда и только тогда, когда $l = p^n$.

d) Найдите обратимые элементы $\mathbb{Z}_l$ и $\mathbb{Q}_l$.

Задача 6. a) Докажите, что $\mathbb{Z}_{p^n} \cong \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_{p^n} \cong \mathbb{Q}_p$.

b) Докажите, что $\mathbb{Q}_p$ изоморфно полю частных $\mathbb{Z}_p$.

c^*) Докажите, что рациональные числа в $\mathbb{Q}_p$ записываются периодическими "дробями".

Задача 7. Для целого числа n и простого натурального p определим $\operatorname{ord}_p(n)$ как максимальное k, такое что n делится на p^k. Пусть $\|n\|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(n)}$.

a) Докажите, что $\|n\|_p$ является нормой на кольце $\mathbb{Z}$.

b^*) Докажите, что пополнение $\mathbb{Z}$ по этой норме изоморфно $\mathbb{Z}_p$

c^*) Продолжите $\|n\|_p$ до нормы в $\mathbb{Q}$ и докажите, что пополнение $\mathbb{Q}$ по этой норме изоморфно $\mathbb{Q}_p$

Задача 8. (Лемма Гензеля)

a) Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — многочлен с целыми коэффициентами, $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — его корень по модулю p. Пусть $P'(a) \neq 0$. Докажите, что существует единственное $\tilde{a} \in \mathbb{Z}_p$ с последней цифрой a, такое что $P(\tilde{a}) = 0$.

b) Что из этого может нарушиться при $P'(a) = 0$?

Подсказка: Для доказательства достаточно уметь решать линейные уравнения.

Определим ряд
$$\exp(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots.$$

Задача 9*. a^*) Докажите, что для $P \in F[[t]]$ вида $a_1t + a_2t^2 + \dots$ ряд $\exp(P)$ сходится к элементу $F[[t]]$ и найдите первые три коэффициента получившегося ряда.

b^*) Докажите, что для таких x отображение $x \to \exp(x)$ является вложением и найдите его образ.

c^*) Напишите обратное к exp отображение в виде формального ряда.

d^*) Докажите, что $\exp(P + Q) = \exp(P)\exp(Q)$.

Задача 10*. a^*) Докажите, что для $p > 2$ ряд $\exp(a)$ сходится в $\mathbb{Z}_p$ если a заканчивается на ноль.

b^*) Докажите, что ряд $\exp(a)$ сходится в $\mathbb{Z}_p$ если a заканчивается на два нуля.

c^*) Докажите, что для таких x отображение $x \to \exp(x)$ является вложением и найдите его образ.

Задача 11*. a^*) Докажите, что $F[[t]]^* \cong F[[t]]^+ \times F^*$, а $F[t^{-1}, t]]^* \cong F[[t]]^+ \times F^* \times \mathbb{Z}$.

b^*) Получите аналогичные выражения для $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_p$.

c^*) Докажите, что $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$ — циклическая при $p \neq 2$.

d^*) Найдите $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$.

Задача 12*. a^*) Докажите, что $\mathbb{Z}_p \ncong \mathbb{Z}_{p'}$ для простых $p \neq p'$.

b^{**}) Докажите, что $\mathbb{Q}_p \ncong \mathbb{Q}_{p'}$ для простых $p \neq p'$.

Подсказка: Некоторые уравнения имеют разное число решений в этих полях.

Дополнение: проективный предел.

Определение 4. Пусть $K_1, K_2, \dots$ — кольца, $\phi_i : K_{i+1} \to K_i$ — отображения колец.

$$K_1 \xleftarrow{\phi_1} K_2 \xleftarrow{\phi_2} K_3 \xleftarrow{\phi_3} K_4 \xleftarrow{\phi_4} K_5 \dots$$

Определим *проективный предел* как множество последовательностей $x_1, x_2, \dots$, так что $x_i \in k_i$ и $\phi_i(x_{i+1}) = x_i$ с почленным сложением и умножением.

Задача 13*. Проверьте, что проективный предел колец является кольцом.

Задача 14*. a^*) Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}_l$ изоморфно проективному пределу колец $K_i = \mathbb{Z}/l^iZ$, где ϕ_i — естественная проекция (взятие остатка по модулю l^i).

b^*) Получите кольцо формальных степенных рядов как аналогичный проективный предел.